Ф. Ж. Вильф

$$E_{\text{кин. полн.}} = \sqrt{\langle(\vec{u}\cdot\langle\vec{P}\rangle_{\Delta t_0})^2\rangle_{\Delta t} + \langle(\vec{u}\cdot\langle\vec{P}_0\rangle_{\Delta t_0})^2\rangle_{\Delta t}} = \sqrt{s^2\cdot P^2 + m_0^2\cdot s^4}$$

ЛОГИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ЧАСТНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

УРСС

Ф. Ж. Вильф

ЛОГИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ЧАСТНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

УРСС
Москва • 2001

ББК 22.314о
УДК 530.1

Вильф Фернандо Жозевич

Логическая структура частной теории относительности. — М.: Эдиториал УРСС, 2001. — 160 с.

ISBN 5-8360-0197-9

В книге содержится подробный критический анализ традиционных постулатов, лежащих в основании частной теории относительности. Предложена новая рациональная система постулатов. Интерпретировано физически содержательным образом знаменитое соотношение Эйнштейна между импульсом $\left(\vec{P}\right)$, массой покоя (m_0) и полной энергией (E) свободной точечной частицы.

Доказывается, что, вопреки традиционной точке зрения, спин точечной частицы и существование античастиц полностью объясняются в рамках классической релятивистской механики и нет никакой необходимости в привлечении специфических квантово-механических представлений.

Доказывается, что соотношение $E = \sqrt{c^2 \cdot P^2 + m_0^2 \cdot c^4}$, хотя и является во всех сегодняшних экспериментальных ситуациях совершенно справедливым, все же представляет собой частный случай более общего соотношения, вид которого приводится и обосновывается.

Книга требует от читателя предварительных знаний физики в объеме общеобразовательной полной средней школы и хотя бы некоторого знакомства с частной теорией относительности (например, в рамках какого-либо популярного изложения).

Книга адресована студентам, самостоятельно изучающим физику, а также преподавателям физики учебных заведений любого типа. Возможно, что книга окажется полезной и для специалистов, занимающихся физикой элементарных частиц.

Группа подготовки издания:

Директор — Доминго Марин Рикой
Заместители директора — Наталья Финогенова, Ирина Макеева
Компьютерный дизайн — Виктор Романов
Главный редактор — Елена Кудряшова
Верстка — Михаил Кириллов
Обработка графики, техническая поддержка — Наталья Аринчева
Менеджер по продажам — Алексей Петяев

Издательство «Эдиториал УРСС». 113208, г. Москва, ул. Чертановская, д. 2/11, к. п. *Лицензия ИД № 03216 от 10.11.2000 г.* Гигиенический сертификат на выпуск книжной продукции *№ 77.ФЦ.8.953.П.270.3.99 от 30.03.99 г. Подписано к печати 24.01.2001 г.* Формат 60×84/16. Печ. л. 10. Зак. № 39

Отпечатано в ТОО «Типография ПЭМ». 121471, г. Москва, Можайское шоссе, 25.

Эдиториал УРСС
научная и учебная литература

Тел./факс: 7(095)135-44-23
Тел./факс: 7(095)135-42-46
E-mail: urss@urss.ru
Каталог изданий в *Internet:* http://urss.ru

ISBN 5-8360-0197-9

Оглавление

Предисловие 5

Глава 1. Анализ традиционных постулатов 6

1.1. Традиционные формулировки 6
1.2. Принцип относительности 7
1.3. Постулат о постоянстве скорости света 10

Глава 2. Рационализация постулатов 13

2.1. Относительность и системы отсчета 13
2.2. Инерциальные системы отсчета и принцип относительности 13

Глава 3. Недостающий постулат и его обоснование 22

3.1. Постановка задачи 22
3.2. Поиски точечного объект-сигнала с необходимыми свойствами 25

Глава 4. Что именно должно было удивлять на этапе построения частной теории относительности 31

Глава 5. Инварианты лоренцевой группы формул преобразования физических величин 36

5.1. Предварительные замечания 36
5.2. Два типа инвариантов 38
5.3. Законы природы 40

Глава 6. Интерпретация соотношения $E^2 - c^2 \cdot \vec{P}^2 = E_0^2$ 46

6.1. Постановка задачи 46
6.2. Интерпретация знаменитого выражения 48
6.3. Собственный механический момент (спин) точечной частицы 50

Глава 7. Новые проблемы и их решения 53

7.1. Первая проблема 53
7.2. Вторая проблема 56
7.3. Третья проблема 62
7.4. Четвертая проблема 67
7.5. Пятая проблема 76

Глава 8. Пропущенный инвариант **81**

Глава 9. Теория относительности и спин точечной частицы **88**

Глава 10. Частицы и античастицы **90**

10.1. Заряд точечной частицы 90
10.2. «Заряд» безмассовой частицы 92
10.3. Заряд массивной частицы 97

Приложение 1.
Понятие о средней скорости **99**

Приложение 2.
О нерелятивистском приближении в механике точечных частиц **102**

Приложение 3.
Понятие ускорения в рамках частной теории относительности **107**

Приложение 4.
Формула Эйнштейна и уравнение Дирака **112**

Приложение 5.
Спин точечной частицы и «фундаментальные конструкции» **123**

Приложение 6.
Универсальный переходный процесс и самоторможение протяженных тел **136**

Приложение 7.
О претензиях к классической электродинамике **150**

Предисловие

В 1996 г. я подготовил к изданию монографию, в которой рассматривались некоторые проблемы, связанные с постулатами частной теории относительности и с интерпретацией спина точечной частицы. Однако возможности для опубликования возникли только в конце 1999 года, причем монографию пришлось разделить на две книги. Одна из них под названием ***«Еще раз о спине точечной частицы, формуле Эйнштейна и релятивистском уравнении Дирака»*** вышла в свет в январе 2000 года в издательстве «УРСС». Сейчас читателю предлагается вторая книга, в которой главное внимание уделено логической структуре частной теории относительности. Тем не менее, некоторые разделы предыдущей книги, хотя и в очень небольшом объеме, пришлось включить в новую книгу. Надеюсь, читатель поймет, что это было совершенно необходимо.

С уважением, автор

Глава 1

Анализ традиционных постулатов

1.1. Традиционные формулировки

В любой претендующей на солидность книге по механике можно ознакомиться с двумя постулатами, на которых, как утверждается, и основана частная теория относительности.

Один из постулатов, известный как «принцип относительности», — если унифицировать его слегка различные (в разных книгах) формулировки, — сводится к тому, чтобы

признавать выражающим закон природы только такое математическое соотношение между физическими величинами, которое имеет один и тот же вид во всех ***инерциальных*** *системах отсчета.* $(\text{П}_\text{т}1)$[1]

Согласно другому постулату,

существует такой материальный объект — свет, — который может находиться ***только*** *в состоянии прямолинейного и равномерного движения относительно любой инерциальной системы отсчета, причем с* ***максимально возможной для материальных объектов скоростью***[2]. $(\text{П}_\text{т}2)$

На всякий случай подчеркну, что использование понятия именно ***максимальной*** скорости движения объекта относительно конкретной инерциальной системы отсчета автоматически означает признание ***одинаковости*** этой скорости относительно ***любой*** инерциальной системы вне зависимости от численного значения упомянутой скорости (как бесконечно большого значения, так и ограниченного сверху)[3]. В противном случае само понятие «максимально возможное значение» теряет логическую содержательность.

---

[1] Индекс «т» здесь и далее означает, что формулировка постулата относится к числу традиционных.

[2] Конечно, для хорошо осведомленного читателя эта формулировка звучит не совсем традиционно. Однако слишком многое зависит от того, каким представляет себе читатель такой объект, как «свет».

[3] Справедливо и обратное утверждение.

Теперь внимание читателя хотелось бы привлечь к мысли, что позволить себе судить об обоснованности приведенных выше постулатов можно[4], лишь если считать себя знакомым как с физически содержательным определением класса (множества) инерциальных систем отсчета[5], так и с признаком отличия этих систем друг от друга. Упомянутые же постулаты не только не предназначались в качестве определения и (или) признака, но принципиально непригодны для этого. В самом деле, давайте оценим с подобной точки зрения первый постулат в его традиционной формулировке ($П_т1$).

1.2. Принцип относительности

Нельзя утверждать, что системы отсчета принадлежат к классу инерциальных, если некоторые соотношения (или одно) между физическими величинами (описывающими состояние материального объекта) имеют один и тот же вид в каждой системе. Ведь, согласно универсальному принципу логики — принципу дополнительности[6], — дать логически содержательное определение можно было бы лишь инерциальной и неинерциальной системам отсчета — сразу обеим, — *их* сопоставив друг с другом, а не одну инерциальную систему с другой из того же класса. Однако допустим, что такое определение дано. Становится ли после этого формулировка постулата ($П_т1$) более определенной?

Во-первых, не следует думать, будто не существует ни одного соотношения между физическими величинами, которое имело бы одинаковый вид как в инерциальной, так и в неинерциальной системах отсчета. А, во-вторых, даже если исключить из формулировки ($П_т1$) термин «инерциальных», постулат ($П_т1$) вполне допустимо воспринимать лишь как утверждение о существовании именно *класса* (то есть — множества) систем отсчета (причем — просто систем[7]), объединенных общим свойством — идентичностью вида, например, одного какого-то соотношения между конкретными физическими величинами. Тем не менее, подобное утверждение все еще выглядело бы неудовлетворительным. Эвристическую ценность можно было бы признать лишь

[4] Изучение любой физической теории начинается с обсуждения обоснованности ее постулатов.

[5] *Просто* системой отсчета допустимо считать три взаимно перпендикулярные и жестко связанные друг с другом идеальные линейки и жестко связанные с ними идеальные часы.

[6] Принцип дополнительности был введен в физику Нильсом Бором. Только с помощью этого принципа возможно придавать логическую, а затем и физическую содержательность какому бы то ни было понятию.

[7] В данном случае эпитет «инерциальные» никакой смысловой нагрузки не несет.

за таким утверждением, из которого также стало бы ясно, ***что именно*** постулируется в качестве признаков ***отличия*** инерциальных систем отсчета друг от друга.

Теперь следует остановиться на достаточно распространенной точке зрения, согласно которой, если не подвергать сомнению ***обоснованность*** обоих постулатов частной теории относительности, то понять ее сегодня не составляет труда, и лишь собственная лень или врожденная тупость могут быть причиной непонимания. Однако кое-что мешает согласиться с подобной точкой зрения, и, в частности, тот хорошо известный факт, что общепризнанный ныне — эйнштейновский — вариант частной теории относительности не смогли понять и принять некоторые выдающиеся ученые, современники Эйнштейна, также активно разрабатывавшие теорию относительности. Кажется, все дело в том, что *прежде, чем соглашаться или не* соглашаться с обоснованностью постулатов (а с них начинается изучение любой теории), стоит выяснить, понятен ли их смысл.

Что касается первого постулата частной теории относительности в его традиционной формулировке ($П_т1$), то его смысл можно пояснить на простом примере.

Пусть наблюдатель, жестко связанный с k-й инерциальной системой отсчета и следящий за точечной частицей, движущейся вечно прямолинейно и равномерно, сумел измерить ***независимыми*** методами ***каждую*** из трех величин: скорость $(\vec{V})$, импульс $(\vec{P})$ и массу (m) частицы. Пусть оказалось, что все эти величины связаны соотношением

$$\vec{V}_k = \frac{\vec{P}_k}{m_k}. \qquad (1,а)$$

Далее, пусть j-й инерциальный наблюдатель, имея дело с той же частицей и проведя аналогичные измерения, обнаруживает, что

$$\vec{V}_j \neq \vec{V}_k, \quad \vec{P}_j \neq \vec{P}_k, \quad m_j \neq m_k. \qquad (2)$$

Так вот, согласно первому постулату, считать соотношение

$$\vec{V} = \frac{\vec{P}}{m}, \qquad (3)$$

выражающим закон природы можно, только если, несмотря на неравенства (2), j-й инерциальный наблюдатель устанавливает, что и

$$\vec{V}_j = \frac{\vec{P}_j}{m_j}. \qquad (1,б)$$

Тем не менее, при этом нельзя упускать из виду одно обстоятельство: либо каждая из j-величин на самом деле находится с каждой подобной k-величиной в функциональной связи, причем такой, что из равенства (1, а) равенство (1, б) последует ***обязательно*** (и наоборот); либо j-величины никак не связаны с качественно подобными k-величинами, и тогда совпадение равенств (1, а) и (1, б) является случайным, так что уже f-й инерциальный наблюдатель отметит неравенство

$$\vec{V}_f \neq \frac{\vec{P}_f}{m_f}. \qquad (1, \text{в})$$

Совершенно ясно, что соотношение (3) будет выражать закон природы (иначе говоря, не будет случайным), лишь если признать необходимость преобразования входящих в это соотношение величин по вполне определенным формулам при переходах из одной инерциальной системы отсчета в другую. Но это значит, что постулат (Π_T1) частной теории относительности обретает физическую содержательность только «на фоне» ***уже*** (заранее) существующих формул преобразования всех физических характеристик, привлекаемых для описания состояния материального объекта. Действительно, только если сначала принять совокупность (группу) формул преобразования физических характеристик, имеет смысл говорить о том, что конкретное соотношение между характеристиками после преобразования каждой из них может либо сохраниться в прежнем виде, либо измениться. ***Изменение вида соотношения после преобразования будет означать не исключение систем отсчета из класса инерциальных, а отказ считать соотношение выражающим закон природы***[8].

Таким образом, традиционную формулировку принципа относительности можно принять, лишь ***заведомо*** допуская существование определенной группы формул преобразования всех физических величин, что, собственно говоря, и позволяет проверить, сохраняет ли написанное сотношение между величинами свой вид после их преобразования. При всем том — обратите внимание — из соотношения между величинами принципиально нельзя вывести формулы преобразования ни одной из величин. В связи с этим очень важно выяснить, достаточно ли постулировать группу формул преобразования для вывода таких соотношений (между преобразуемыми величинами), которые оказались бы инвариантными относительно преобразований, а тем самым заслуживающими, чтобы их считали выражающими законы природы. Ведь, если окажется, что достаточно, то от традиционной формулировки принципа относительности придется отказаться: бессмысленно постулировать то, что выводится.

[8] Как видно, выбор существует.

1.3. Постулат о постоянстве скорости света

Теперь обратимся ко второму постулату ($П_т2$) частной теории относительности. Бросается в глаза, что его нельзя воспринимать иначе, как своеобразное (пусть ограниченное всего лишь одним признаком), но все же ***определение*** материального объекта, названного «светом». От всех прочих объектов свет, согласно постулату-определению ($П_т2$), отличается характером движения. Однако стоит выяснить, имеет ли свет (и соответствующий постулат) хоть какое-нибудь отношение к механике, объектами которой являются точечные частицы.

Дело в том, что достаточно даже поверхностного знакомства с историей физики конца XIX – начала XX столетий, чтобы не питать никаких иллюзий в отношении того, чем считался свет на момент формулирования обсуждаемого постулата. А поскольку считался он ***сплошной*** средой — свободным (ни с чем не взаимодействующим) материальным континуумом, находящимся в состоянии движения, вполне уместно было бы придать второму постулату более адекватную формулировку. Например, такую:

скорость перемещения фронта колебаний некоторой физической величины, характеризующей свободный материальный континуум, имеет одно и то же значение относительно любой инерциальной системы отсчета. ($П_т3$)

Никого из физиков дорелятивистской эпохи подобное утверждение удивить не могло, коль скоро все бесконечно протяженное пространство считалось заполненным материальной сплошной средой, названной ***эфиром***, колебания связанных воедино элементов которого и могут передаваться от источника к приемнику, также погруженных в эфир. В подобной ситуации скорость распространения фронта волны деформации эфира (такой, как, например, сдвиг или растяжение-сжатие) зависит только от двух характеристик-***констант*** среды — плотности и упругости.

Когда точечный наблюдатель — источник незатухающих колебаний — утверждает, что относительно той точки среды, в которой он вечно присутствует, фронт волны перемещается равномерно со скоростью ς, то этот наблюдатель ***ничего другого и представить себе не может.*** Но и точечный наблюдатель-приемник, утверждающий, что мимо него фронт волны перемещается равномерно со скоростью ς, тоже не может представить себе ничего другого, причем ему даже нет необходимости знать ни о движении или покое источника в процессе генерации колебаний, ни даже о самом существовании источника[9].

[9] Бегущая монохроматическая волна существует по определению вечно.

Следует иметь в виду, что представление о движении ***бесконечно*** протяженного (во всех направлениях), изотропного и однородного объекта («эфира») ***как целого*** относительно чего бы то ни было лишено физической содержательности.

Что же касается вечного прямолинейного и равномерного движения точечного источника колебаний «эфира» относительно точечного приемника, то вследствие такого движения значения частоты и длины волны колебаний, измеряемые наблюдателем-источником, отличаются от значений, измеряемых наблюдателем-приемником. Но не будут отличаться измеренные ими значения скорости фронта бегущей волны колебаний. Значение скорости, как уже говорилось, зависит только от плотности и упругости материального континуума (сплошной среды — «эфира»)[10].

Таким образом, приведенная выше корректная формулировка ($П_т3$) второго из двух традиционных постулатов частной теории относительности не могла восприниматься в дорелятивистскую эпоху иначе, как совершенно тривиальное утверждение. Вот почему так поразили в своё время научную общественность результаты экспериментов, засвидетельствовавшие, что ***не существует упругой и плотной светопередающей среды, которая, заполнив пространство, могла бы находиться также и в состоянии покоя.*** Только тогда вышеупомянутое утверждение перестало казаться тривиальным.

Если же испущенный источником свет уподобить потоку точечных частиц («ньютоновых корпускул»), свободно движущихся в ***пустом*** пространстве одна за другой, второй постулат придется сформулировать следующим образом:

> *существует разновидность точечных частиц, каждая из которых выглядит только движущейся относительно любого инерциального наблюдателя, причем — в пустом пространстве прямолинейно и равномерно со скоростью, имеющей одно и то же значение (обозначенное символом* ς*).* ($П_т4$)

В связи с подобной формулировкой следует вспомнить, что, согласно сказанному на с. 6, скорость, значение которой одинаково в глазах любого инерциального наблюдателя, является максимально возможной, которой могла бы обладать точечная частица. ***Следовательно, если точечная частица выглядит в различных инерциальных системах отсчета***

---

[10] Необходимо иметь в виду, что «эфир» XIX века считался средой, которая ***могла находиться также и в состоянии покоя.*** Это, казалось бы, — вполне естественное предположение, коль скоро его относят к материальной среде, заполняющей пространство. Именно это предположение было самым существенным, но именно его и пришлось отвергнуть под напором экспериментальных данных.

обладающей различной по величине скоростью, величина эта обязательно меньше упомянутого ранее максимального значения ς.

Итак, второй постулат частной теории относительности в корректной формулировке ($П_т4$), пригодной для механики точечных частиц, по существу представляет собой пусть ограниченное, но тем не менее физически содержательное определение частицы, которую имеет смысл назвать точечным объект-сигналом. Однако вне зависимости от экспериментальной обоснованности постулата в формулировке ($П_т4$) вызывает справедливое удивление тот факт, что свободная ***точечная*** частица, обладающая скоростью, равной ς в одной инерциальной системе отсчета (j-й), обладает ***такой же по величине*** скоростью в другой инерциальной системе (k-й), движущейся относительно первой (j-й) со скоростью $\vec{V}_0$. Совершенно необходимо дать объяснение этому феномену, ибо уже вошло в подсознание, что дорелятивистская механика частиц оперировала бы соотношением $\vec{\varsigma}_j = \vec{V}_0 + \vec{\varsigma}_k$.

А вот ***традиционная*** формулировка ($П_т3$) второго постулата частной теории относительности не вызывает никакого удивления, но, увы, остается совершенно непонятным, какое отношение имеет свет к механике точечных частиц, существующих и движущихся в пустом пространстве.

И кое-что еще требуется объяснить: зачем вообще нужен постулат ($П_т4$), содержание которого сводится к утверждению о существовании пусть точечного, но все равно именно объект-***сигнала***.

Глава 2

Рационализация постулатов

2.1. Относительность и системы отсчета

Выявленный в гл. 1 серьезный недостаток, присущий традиционной формулировке принципа относительности, конечно, необходимо устранить. Однако прежде, чем переходить непосредственно к этому, нужно выяснить, зачем понадобилось вводить представление об относительности. Связано это с подразделением всех физических величин на две категории.

К одной из них относятся характеристики-*константы*[1], призванные удостоверять себетождественность материального объекта[2], иначе говоря, выражающие признаки *качественного* отличия конкретной разновидности объектов от всех прочих разновидностей объектов.

К другой категории относятся характеристики, с помощью которых описывают *состояние* себетождественного объекта, зависящее от конкретной экспериментальной обстановки[3].

Так вот, что касается характеристик второй категории, понятие о *значении* характеристики (и *направлении*, если она является вектором) обретает физическую содержательность только по отношению к определенной (выбранной) системе отсчета — совокупности пространственных осей координат (трех взаимно перпендикулярных линеек) и устройства отсчета времени (часов)[4].

2.2. Инерциальные системы отсчета и принцип относительности

Теперь можно обратиться к принципу относительности, который, как подчеркивалось в гл. 1, опирается на понятие именно *класса* инер-

---

[1] К их числу относятся, например: масса покоя, электрический заряд, спин (собственный механический момент), собственные размеры.

[2] Здесь и далее в качестве материальных объектов будут рассматриваться именно и только *точечные частицы*. Поэтому далее собственные размеры не будут фигурировать в качестве характеристики-константы.

[3] К числу подобных характеристик относятся: импульс, кинетическая и потенциальная энергии, скорость, «орбитальный» механический момент, частота вращения вокруг пространственной оси и т. п.

[4] В этой книге не обсуждается вопрос, каким образом обретает физическую содержательность не значение характеристики, а она сама. Предполагается, что читатель знает, что такое импульс, потенциальная энергия и т. п. характеристики точечной частицы.

циальных систем отсчета. Хотя вполне возможно, что читатель знаком с определением класса таких систем и признаком отличия их друг от друга (обнаружив все это в каких-либо руководствах по механике), я все же рискну еще раз коснуться этой темы.

Прежде всего, следует принять во внимание, что, согласно универсальному принципу логики — принципу дополнительности, — логически содержательное определение может быть дано *лишь сразу двум* системам отсчета — инерциальной и неинерциальной, и для этого достаточно указать хотя бы на один признак отличия их *друг от друга*. Но вот здесь возникает любопытное осложнение.

Допустим, что экспериментально обоснованное соотношение между несколькими физическими величинами[5] имеет в одной системе отсчета (которую назовем — *пока что только назовем* — инерциальной) один вид, а в другой (которую *назовем* неинерциальной) — другой вид. Можно ли считать различный вид соотношения между, например, четырьмя *вполне определенными* величинами признаком отличия двух систем друг от друга? Нет. Ибо нельзя гарантировать, что не найдется соотношения между *другими* величинами, вид которого был бы одинаков в обеих системах.

Далее, вследствие относительности движения признаком отличия не может служить ни скорость, ни ускорение одной из *всего двух* систем относительно другой из этой же пары.

Попробуем найти выход из положения, обратившись к наиболее трудной ситуации, когда все системы отсчета движутся друг относительно друга *прямолинейно*.

Сначала сравним между собой три системы отсчета (f-ю, j-ю, k-ю). Пусть выяснилось, что j-я система вечно движется относительно k-й *прямолинейно и равномерно* (с относительной скоростью $\vec{V}_{jk}$), а относительно f-й движется *с ускорением*. Представим себе, что на этом — чисто «кинематическом» — основании решено *назвать* (и не более того) j-ю и k-ю системы инерциальными, а f-ю — неинерциальной. Это означало бы, что можно отличить *класс* — именно класс — инерциальных систем отсчета от *одной единственной* неинерциальной системы. Тем не менее, имеет смысл обратить внимание на одно, достаточно существенное обстоятельство[6].

Представим себе, что существуют два класса (два множества) объектов, причем все различие между классами сводится к тому, что объекты одного из них помечены символом «А», а объекты другого —

---

[5] Такое соотношение могло бы выражать закон природы.

[6] Оно является очень важным также и для понимания логической структуры *общей* теории относительнсти.

символом «Б». Допустим, что *все* (и А-, и Б-) объекты движутся прямолинейно, простоты ради — вдоль общей X-оси. Допустим также, что все объекты А-класса движутся друг относительно друга равномерно (без ускорения) с различными скоростями и точно так же движутся друг относительно друга все объекты Б-класса; но вот уже друг относительно друга А-объекты и Б-объекты движутся ускоренно[7].

Вполне естественно, что с каждым объектом можно связать систему отсчета. Однако если в рассматриваемой ситуации присвоить названия: А-множеству — «класс инерциальных систем отсчета», а Б-множеству — «класс неинерциальных систем отсчета» (или наоборот), это вовсе не означает, что названия «А-класс» и «Б-класс» обрели содержательность. На это обстоятельство очень стоит обратить внимание, ибо понятиям «инерциальная и неинерциальная системы отсчета», конечно же, следует придавать *физическую* содержательность.

Рассмотрим теперь ситуацию, в которой, в отличие от предыдущей, фигурируют: *бесконечно большое* число систем отсчета (объектов) А-класса, *одна* система отсчета (*один* объект) Б-класса и еще *одна* система отсчета (*один* объект) В-класса. Пусть отличие Б- и В-систем друг от друга состоит в том, что относительно А-систем Б-система движется с *одним* ускорением, а В-система — с *другим* ускорением. Тогда, приняв во внимание, что общее число систем (всех трех классов) бесконечно велико, можно утверждать следующее:

- *не существует ни одной системы отсчета, относительно которой Б-система двигалась бы без ускорения;*
- *не существует ни одной системы отсчета, относительно которой В-система двигалась бы без ускорения;*
- *существует бесконечно много систем отсчета, относительно каждой из которых любая из А-систем движется без ускорения (или покоится).*

Таким образом, создается впечатление, что, оставаясь в рамках *чисто кинематических понятий*, можно придать физическую содержательность утверждению, что Б-система и В-система являются *неинерциальными*, а каждая из А-систем относится к классу инерциальных.

Если ввести бесконечно много других систем (Г-, Д-, Е-, ...) с условием, чтобы каждая из них двигалась относительно А-системы со *своим* ускорением, в сделанные выше три утверждения лишь придется внести дополнения: *«не существует ни одной системы отсчета, относительно которой Г-система двигалась бы без ускорения» и т. п.*

[7] В описываемой ситуации ускорение любого А-объекта относительно любого Б-объекта одинаково.

В этом случае, как и в предыдущем, ускорение можно считать понятием «абсолютным» — в отличие от скорости. «Абсолютность» ускорения попросту означает, что среди бесконечно большого числа ***различных*** систем отсчета ***нет ни одной***, относительно которой система, названная — пока лишь только ***названная*** — неинерциальной, двигалась бы ***без ускорения***. «Относительность» же скорости означает, что среди бесконечно большого числа ***различных*** систем отсчета найдутся по крайней мере три такие системы (все из А-класса), что входящие в одну пару ($A_{1,2}$) друг относительно друга, например, ***покоятся***, а входящие в другую пару ($A_{1,3}$), равно как и в третью пару ($A_{2,3}$), друг относительно друга ***движутся***[8].

Положение принципиально изменится, если по сравнению с предшествующей ситуацией Б-класс будет насчитывать по крайней мере две системы отсчета. При условии, что обе (все) системы, входящие в Б-класс, обладают ***одинаковым*** ускорением относительно любой из систем А-класса, (равно как относительно В-системы), одно из сделанных выше трех утверждениий оказывается несостоятельным. Нельзя уже сказать, что «*не существует **ни одной** системы отсчета, относительно которой Б-система* (*любая из входящих в Б-класс*) *двигалась бы без ускорения*». Ведь теперь в Б-класс входят по крайней мере две системы, которые (точно так же, как и системы, входящие в А-класс) друг относительно друга движутся без ускорения — равномерно и прямолинейно — либо покоятся. В рассматриваемой новой ситуации лишь ускорение, испытываемое В-системой (***единственной***, образующей В-класс), продолжает сохранять характер абсолютного. Совершенно очевидно, что все, сказанное в этом абзаце, остается справедливым, если число систем Б-класса будет столь же велико, сколь число систем А-класса. Но в этом случае возникает проблема.

Если ранее А-класс можно было отличить от Б-класса по числу систем, то теперь:

- *в каждый из этих классов входит одинаковое число систем*;
- *в каждом классе присутствует, образно выражаясь, одинаковый набор относительных скоростей, как по величине* (*от нуля и до наибольшей возможной*), *так и по направлению*;
- *в каждом классе все системы движутся друг относительно друга одинаковым образом — без ускорения.*

Только систему В-класса (и лишь потому, что она остается в классе единственной) уверенно можно отнести к числу неинерциальных: она

---

[8] Различие таких систем отсчета, как, например, покоящиеся друг относительно друга, состоит в том, что связаны они с различными объектами. А вот признаки различия уже самих объектов лежат вне рамок кинематики.

движется с ускорением как относительно А-систем (с *одним* ускорением), так и относительно Б-систем (с *другим* — и в этом все дело — ускорением). Но, оставаясь в рамках чистой кинематики, невозможно сказать, принадлежат ли к классу *неинерциальных* А-системы (тогда Б-системы автоматически подпадут под определение *инерциальных*) или же Б-системы. Чтобы ответить на этот вопрос, недостаточно использовать только кинематические понятия[9].

Учитывая все вышесказанное, представляется необходимым идентифицировать класс инерциальных систем отсчета как класс, которому соответствует определенная группа формул преобразования величин, описывающих состояние точечной частицы.

Ясно, что класс инерциальных систем отсчета состоит из бесконечно большого числа *пар* систем, отличающихся друг от друга значениями и направлениями относительных скоростей.

Вспоминая понятие «относительность», легко указать и на признак отличия уже одной инерциальной системы от другой, даже если обе можно *посчитать* образующими одну пару. Любые две системы различны, если отнесенная к каждой из них одна и та же характеристика частицы (из числа тех, с помощью которых описывают ее состояние) отличается значением и (или) направлением (для векторов).

Теперь, наконец, займемся традиционной формулировкой именно *принципа* относительности. Как подчеркивалось в гл. 1, эта формулировка опирается (скрытно) на представление о *классе* инерциальных систем отсчета. Однако мне кажется, что все равно она оставляет в душе ощущение неопределенности. Вчитайтесь в нее! Что означают слова «закон природы (например, соотношение $\vec{V} = \dfrac{\vec{P}}{m}$) имеет *один и тот же* вид *в разных* инерциальных системах отсчета»? Ведь уже установлен признак отличия одной из подобных систем от другой, причем вид соотношения нельзя отнести к числу признаков.

Можно было бы предположить, что вид соотношения служит признаком отличия одного класса систем от другого. Увы, как уже отмечалось, нет гарантии, что *каждое* из всех мыслимых соотношений между физическими величинами будет выглядеть по-разному в системах отсчета, принадлежащим разным классам[10].

---

[9] Что касается вращающихся систем отсчета, то все они, сколько бы их ни было, являются неинерциальными «в принципе»: все они движутся непрямолинейно.

[10] А если не каждое, то пришлось бы вводить уже *категории* соотношений, подразделять эти категории на «определяющие» и «неопределяющие», затем искать независимый признак отличия их друг от друга и т. п.

Таким образом, единство вида какого-то математического соотношения между конкретными (выбранными) физическими величинами является не более чем выражением ***эквивалентности различных*** систем, принадлежащих ***одному*** классу.

Вполне возможно, что современному образованному читателю это утверждение покажется тривиальным. Однако на рубеже XIX–XX столетий было распространено мнение о существовании ***привилегированной*** инерциальной системы отсчета. Считалось, что только в ней соотношение между физическими величинами принимает ***истинный*** вид. Во всех же прочих инерциальных системах отсчета соотношение и ***должно*** было принимать различный вид, который тем самым выступал в качестве признака отличия друг от друга систем одного класса. Исходя из сказанного в этом абзаце, понятно, почему первым постулатом частной теории относительности нередко считают утверждение об *эквивалентности всех инерциальных систем отсчета (состоящей в идентичности вида каждого соотношения, признаваемого выражающим закон природы).*

Но, и это тоже отмечалось в гл. 1, говорить о единстве вида соотношения между конкретными величинами, характеризующими состояние частицы, имеет смысл, только если заранее считать небходимым преобразование физической величины по вполне определенной формуле при переходе от одной системы отсчета к другой. Если в результате вид соотношения изменится, то не системы (j-я и k-я) исключаются из класса инерциальных, а соотношение — из числа выражающих законы природы. А, поскольку из соотношения вывести формулу преобразования принципиально невозможно, именно соответствие ***одной определенной*** группы формул преобразования (всех физических величин) ***каждой*** паре из класса систем (инерциальных) и следует считать признаком ***эквивалентности всех*** пар систем, принадлежащих к этому классу.

Теперь можно подвести итоги.

1. *Постулируется определенный признак отличия класса инерциальных систем отсчета от любой неинерциальной системы:* ***определенная группа формул преобразования физических характеристик, описывающих состояние точечной частицы в инерциальной системе отсчета.*** (П$_р$1)

2. *Постулируется определенный признак отличия инерциальных систем отсчета друг от друга:* ***физическая величина, характеризующая состояние частицы, имеет разное значение в разных системах.*** (П$_р$2)

3. *Постулируется эквивалентность всех различных инерциальных систем отсчета путем* ***сопоставления любым парам систем одной и той же группы формул преобразования всех физических величин, описывающих состояние точечной частицы в любой физически реальной обстановке.*** (П$_р$3)

Выражающими законы природы признаются теперь соотношения, инвариантные относительно преобразований группы формул. Выявить же такие соотношения между величинами можно чисто математическими приемами.

Учитывая, что по крайней мере ***придумать*** можно не одну группу формул, следует надеяться на существование чисто экспериментального критерия отбора группы, адекватной физической реальности.

Необходимо сделать одно замечание, касающееся направленности экспериментов, имеющих целью отобрать группу, адекватную реальности. Дело в том, что формулам преобразования либо некоторых, либо всех физических величин, но формулам, принадлежащим ***разным*** группам, возможно, будет соответствовать ***одинаковый*** вид инвариантного (относительно преобразований каждой из групп) соотношения между качественно подобными величинами. Например, такого соотношения, как $\vec{V} = \dfrac{\vec{P}}{m}$. Вот почему экспериментальным путем необходимо устанавливать адекватность физической реальности именно группы формул, а не соотношений между величинами.

Нетрудно показать на простом примере, что отмеченная только что возможность действительно имеет место.

Пусть j-м инерциальным наблюдателем установлено, что соотношение $\vec{V}_j = \dfrac{\vec{P}_j}{m_j}$ справедливо при любых значениях (и направлениях — для векторов) величин $\vec{V}_j, \vec{P}_j, m_j$, измеренных — каждая — независимо от двух других. Если и k-й наблюдатель обнаружит, что

$$\vec{V}_k = \frac{\vec{P}_k}{m_k} \tag{1,a}$$

также при любых значениях и направлениях независимо измеренных величин $\vec{V}_k, \vec{P}_k, m_k$, соотношение $\vec{V} = \dfrac{\vec{P}}{m}$ следует признать выражающим закон природы. При этом оба наблюдателя, обменявшись информацией, вполне могли обнаружить, что

$$\vec{V}_j \neq \vec{V}_k, \quad \vec{P}_j \neq \vec{P}_k, \quad m_j \neq m_k.$$

Теперь предположим, что в результате проведения экспериментов установлено существование функциональной связи между величинами

$$\vec{V}_j \text{ и } \vec{V}_k, \quad \vec{P}_j \text{ и } \vec{P}_k, \quad m_j \text{ и } m_k.$$

Пусть для определенности наблюдатели движутся друг относительно друга прямолинейно и равномерно вдоль общей X-оси со скоростью V_0. Допустим, оказалось, что

$$V_{k,x} = V_{j,x} - V_0; \quad V_{k,y} = V_{j,y}; \quad V_{k,z} = V_{j,z}; \tag{4, а}$$

$$P_{k,x} = P_{j,x} - m_j \cdot V_0; \quad P_{k,y} = P_{j,y}; \quad P_{k,z} = P_{j,z}; \tag{4, б}$$

$$m_k = m_j{}^{11)}. \tag{4, в}$$

Располагая формулами (4), k-й наблюдатель в состоянии выяснить, можно ли отнести установленное им соотношение (1, а) к законам природы. Для этого достаточно выразить k-е величины через j-е и посмотреть, окажется ли вид соотношения после преобразований идентичным виду исходного соотношения. После подстановки получается, что

$$V_{j,y} = \frac{P_{j,y}}{m_j}; \quad V_{j,z} = \frac{P_{j,z}}{m_j}; \quad V_{j,x} - V_0 = \frac{P_{j,x} - m_j \cdot V_0}{m_j} = \frac{P_{j,x}}{m_j} - V_0.$$

Из длинного равенства следует, что и $V_{j,x} = \dfrac{P_{j,x}}{m_j}$, так что в итоге k-й наблюдатель приходит к выводу, что вид соотношения, полученного им после преобразований, —

$$\vec{V}_j = \frac{\vec{P}_j}{m_j}{}^{12)} \quad — \tag{1, б}$$

действительно идентичен виду исходного соотношения (1, а)[13].

Итак, утверждению *«конструкция $\left\{\vec{V} - \dfrac{\vec{P}}{m}\right\}$ является одним из инвариантов некоторой группы формул преобразования физических величин»* можно придать вид математического выражения:

$$\left\{\vec{V}_j - \frac{\vec{P}_j}{m_j}\right\} = \left\{\vec{V}_k - \frac{\vec{P}_k}{m_k}\right\} = \mathrm{Inv}.$$

Символом Inv обозначена константа (она может быть скалярной или векторной) — инвариант преобразований, — значение которой может быть установлено только на основании результатов экспериментов.

[11] Эти формулы преобразвания физических величин принадлежат галилеевой группе. Параметром преобразования служит величина V_0.

[12] Поскольку $\vec{P} = \vec{e}_x \cdot P_x + \vec{e}_y \cdot P_y + \vec{e}_z \cdot P_z$, (где $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ — орты системы координат), $\vec{V} = \vec{e}_x \cdot V_x + \vec{e}_y \cdot V_y + \vec{e}_z \cdot V_z$, три равенства для скалярных величин эквивалентны одному равенству для векторных величин.

[13] Иными словами, k-й наблюдатель считает себя в состоянии установить, с каким соотношением имеет дело его j-й коллега. В свою очередь j-й наблюдатель в состоянии сообщить своему k-му коллеге, подтверждается или нет то, что было последним установлено.

Посмотрим теперь, что изменится, если вместо группы формул (4) принять группу

$$V_{k,x}=\frac{\varsigma^2\cdot(V_{j,x}-V_0)}{\varsigma^2-V_{j,x}\cdot V_0};\quad V_{k,y}=\frac{\varsigma^2\cdot V_{j,y}}{\eta\cdot(\varsigma^2-V_{j,x}\cdot V_0)};\quad V_{k,z}=\frac{\varsigma^2\cdot V_{j,z}}{\eta\cdot(\varsigma^2-V_{j,x}\cdot V_0)};$$

$$P_{k,x}=\eta\cdot(P_{j,x}-V_0\cdot m_j);\quad P_{k,y}=P_{j,y};\quad P_{k,z}=P_{j,z};$$

$$m_k=\eta\cdot m_j\cdot\left(1-\frac{V_0\cdot V_{j,x}}{\varsigma^2}\right)$$

(здесь V_0, ς, η — параметры преобразования, а все формулы преобразования принадлежат лоренцевой группе).

Выразив в соотношении (1, а) k-е величины через j-е, получим:

$$\frac{\varsigma^2\cdot(V_{j,x}-V_0)}{\varsigma^2-V_{j,x}\cdot V_0}=\frac{\varsigma^2\cdot(P_{j,x}-V_0\cdot m_j)\cdot\eta}{m_j\cdot(\varsigma^2-V_{j,x}\cdot V_0)\cdot\eta};$$

$$\frac{\varsigma^2\cdot V_{j,y}}{\eta\cdot(\varsigma^2-V_{j,x}\cdot V_0)}=\frac{\varsigma^2\cdot P_{j,y}}{m_j\cdot(\varsigma^2-V_{j,x}\cdot V_0)\cdot\eta};$$

$$\frac{\varsigma^2\cdot V_{j,z}}{\eta\cdot(\varsigma^2-V_{j,x}\cdot V_0)}=\frac{\varsigma^2\cdot P_{j,z}}{m_j\cdot(\varsigma^2-V_{j,x}\cdot V_0)\cdot\eta},$$

откуда следует, что $V_{j,x}=\dfrac{P_{j,x}}{m_j}$; $V_{j,y}=\dfrac{P_{j,y}}{m_j}$; $V_{j,z}=\dfrac{P_{j,z}}{m_j}$.

Таким образом, конструкция $\left\{\vec{V}-\dfrac{\vec{P}}{m}\right\}$ является инвариантом, принадлежащим ***разным*** группам формул преобразования. Установив экспериментально, что, например, для определенной разновидности частиц $\left\{\vec{V}-\dfrac{\vec{P}}{m}\right\}=0$, наблюдатели ***на одном этом основании не смогут решить, какая из групп формул преобразования адекватна физической реальности.***

Глава 3

Недостающий постулат и его обоснование

3.1. Постановка задачи

Хотелось бы обратить внимание читателя на то, что среди постулатов, предложенных в конце § 2.2 в качестве основы для построения частной теории относительности[1], присутствует под номером (П$_{\text{р}}$3) корректно сформулированный «принцип относительности», но отсутствует тот традиционный постулат, в котором фигурировали свет и его скорость. Тем не менее, необходимость ввести нечто, подобное этому постулату, возникает на этапе ***реализации*** принципа относительности. Если вчитаться в его формулировку (П$_{\text{р}}$3), то бросается в глаза, что не просто постулируется эквивалентность всех инерциальных систем отсчета[2]. Одно лишь подобное утверждение было бы неработоспособным, а потому было сделано добавление, что эквивалентность состоит в сопоставлении всем парам инерциальных систем отсчета одной, вполне определенной, группы формул преобразования. Но в таком случае принцип относительности еще должен быть реализуем. Реализация же должна означать указание на группу формул преобразования в ***явном*** виде. Установить явный вид формул можно либо непосредственно экспериментальным путем, либо, попросту говоря, путем придумывания. В последнем случае необходимо будет из множества групп ***выбрать*** одну, адекватную физической реальности, для чего придется все равно обратиться к эксперименту.

После того, как экспериментальный отбор будет осуществлен, можно либо расширить упоминавшееся выше добавление, содержащееся в формулировке (П$_{\text{р}}$3) принципа относительности[3], либо принять группу формул преобразования всех физических характеристик уже в ***явном*** виде в качестве самостоятельного — четвертого — постулата.

Что касается самой идеи экспериментального отбора группы формул, то она очень проста.

---

[1] Это сказано в надежде на согласие читателя с тем, что предложенная его вниманию система постулатов (П$_{\text{р}}$1)–(П$_{\text{р}}$3) гораздо более рациональна, чем один традиционный постулат (П$_{\text{т}}$1).

[2] В качестве синонима эквивалентности можно принять «физическую идентичность» или «физическую неразличимость» инерциальных систем отсчета.

[3] Расширение состоит в конкретизации понятия «определенная группа» путем представления всех формул группы в явном виде.

Два точечных инерциальных наблюдателя (j-й и k-й), вечно движущиеся друг относительно друга вдоль общей X-оси со скоростью V_0, наблюдают за свободной точечной частицей, измеряют значения ее характеристик и, обмениваясь информацией об этих значениях, строят — каждый — зависимости, например, значений проекций «своего» импульса частицы (измеренного, допустим, j-м наблюдателем) от значений проекций «чужого» (измеренного k-м наблюдателем). При этом каждый наблюдатель и радиус-вектор точки присутствия частицы отсчитывает от «своего» начала координат[4]. Что же касается момента времени, в который частица присутствует в установленной независимо каждым из наблюдателей точке пространства, то отсчитывают они тот момент оба от общего начала — момента вечности, в который (в процессе движения наблюдателей со скоростью $\vec{V}_0$) совпадали центры j-й и k-й систем пространственных координат. Здесь следует принять во внимание, что различные инерциальные наблюдатели всего лишь мгновение могут находиться в одной точке пространства, а за мгновение нельзя удостовериться в одинаковости «хода» часов[5]. Таким образом, подобно радиус-вектору точки пространства, и момент времени присутствия частицы в этой точке должен считаться физически содержательной величиной только в конкретной системе отсчета времени, несмотря на общее начало отсчета.

Если j-й и k-й наблюдатели желают сверить «ходы» своих часов, они *вынуждены* прибегнуть к использованию сигнала, переносящего информацию о положении стрелки часов. Хорошо бы потребовать от подобного сигнала способности не только двигаться лишь прямолинейно и равномерно между актами отправления и приема[6], но еще и обладать бесконечно большой скоростью[7]. В противном случае у наблюдателей не будет никаких оснований считать, что созданное *каждым из них в отдельности* устройство — часы — обладает именно одинаковым «ходом». В этом, для многих воистину противном случае, если j-й наблюдатель станет утверждать, что частица, за которой он

---

[4] Радиус-вектор точки пространства можно считать величиной физически содержательной только в заранее выбранной системе координат.

[5] Простоты ради будет считаться, что часы имеют только одну стрелку. Тогда «ход» часов — это *промежуток* времени, за который стрелка совершает полный оборот. То есть «ход» часов — это период. Сверка периодов двух часов, разумеется, требует времени гораздо большего, чем период. Реально добиться совпадения периодов двух часов можно только, если они вечно покоятся друг относительно друга.

[6] Окажись сигнал испытывающим ускорение, он донесет до приемника (если, конечно, в него попадет) искаженную информацию.

[7] Если скорость объекта относительно некоторой инерциальной системы отсчета бесконечно велика, то она столь же велика относительно любой другой инерциальной системы: $\infty \pm V_0 = \infty$.

следит, присутствует в точке пространства с координатами $\{x_j, y_j, z_j\}$ в момент t_j, то k-й наблюдатель будет ***обязан*** считать частицу присутствующей в точке с координатами $\{x_k, y_k, z_k\}$ в момент t_k, ***не совпадающий*** с моментом t_j. Образно выражаясь, когда бы k-й наблюдатель ни посмотрел на положение стрелки своих часов, он не сможет перевести ее в то же положение, в котором находится (в это мгновение) стрелка часов j-го наблюдателя. В рассматриваемом «противном» случае понятие «сейчас» из категории абсолютных перешло в категорию относительных по прозаической причине — отсутствию переносчика информации с требуемыми свойствами.

Возможно, что кого-то из читателей обеспокоит ситуация, в которой окажутся оба наблюдателя, не найдись в природе объекта, способного двигаться прямолинейно и равномерно с бесконечно большой скоростью и потому позволяющего синхронизировать двое часов. Однако для передачи информации в ходе экспериментального отбора группы формул преобразования различие в «ходе» часов не играет никакой роли[8]. Все, что в этом случае требуется от скорости сигнала (двигающегося прямолинейно и равномерно), — это быть большей V_0, иначе сигнал от наблюдателя-отправителя не достигнет наблюдателя-получателя. Проблема совсем в другом.

Как уже говорилось в § 2.2, класс инерциальных систем отсчета состоит из ***бесконечно большого*** числа пар систем, а отличается одна пара от другой, в частности, значением скорости V_0. Следовательно, чтобы догнать за конечный промежуток времени любого инерциального наблюдателя, сигнал должен обладать скоростью большей, чем любое значение, которое можно приписать величине V_0.

Таким образом, отобрать экспериментальным путем адекватную физической реальности группу формул преобразования можно, лишь если в этой реальности существует объект, обладающий ***максимальной*** для всех материальных тел скоростью[9]. При этом само число сантиметров (или километров) в секунду принципиальной роли не играет, и потому значение скорости объект-сигнала может быть обозначено просто символом ς[10].

Необходимо подчеркнуть, что из принципа относительности, утверждающего эквивалентность всех инерциальных систем отсчета, следует, что в глазах инерциальных наблюдателей, образующих ***любую*** пару, объект-сигнал должен обладать одним и тем же значением скорости (ς).

---

[8] Естественно, считается, что каждый из наблюдателей в состоянии убедиться в ***неизменности*** «хода» ***собственных*** часов, то есть — в их исправности.

[9] Тогда скорость V_0 автоматически окажется меньшей скорости подобного объекта.

[10] Значение ς может быть как ограниченным сверху, так и бесконечно большим.

Необходимо отметить еще одно важное свойство, которое должно быть присуще подобному объект-сигналу, — независимость его скорости от его импульса[11]. А ведь объекту, используемому в качестве сигнала, следует придавать исчезающе малый импульс, чтобы при отправлении и приеме не изменить импульсы материальных наблюдателей. Только тогда не изменится и значение их относительной скорости V_0.

Однако вот вопрос: ***не связаны ли между собой каким-нибудь образом значение скорости используемого в эксперименте объект-сигнала и явный вид каждой из формул преобразования, экспериментально же отобранных?*** Следует иметь в виду, что заведомо такую связь отрицать нельзя. Но если допустить, что она имеет место, то все формулы преобразования, далее признаваемые адекватными физической реальности, можно не только устанавливать непосредственно экспериментальным путем, но и ***выводить с помощью рассуждений с обязательным привлечением сигнала, обладающего вполне определенными свойствами.*** Вот почему необходимо прежде всего выяснить, существует ли требуемый объект-сигнал. А выяснить это можно только в ходе экспериментальных исследований.

3.2. Поиски точечного объект-сигнала с необходимыми свойствами

Поскольку в этой книге речь идет только о точечных частицах, целесообразно обсудить эксперимент, ставящий целью обнаружить именно точечный объект, способный выполнять функции сигнала. Идейно такой эксперимент прост: инерциальный наблюдатель сколь угодно много раз увеличивает импульс точечной частицы (принадлежащей к ν-й разновидности), толкая ее, например, вдоль X-оси, после чего измеряет скорость частицы, а массу ее вычисляет по формуле $m = \dfrac{P_x}{V_x}$. Сама же эта формула может быть признана выражающей закон природы на основании самостоятельных экспериментов.

Предвидимые результаты эксперимента по поиску объект-сигнала таковы: значение V_x окажется либо неограниченно возрастающим с ростом P_x, либо достигающим конечного значения, которое и будет обозначено символом ς_ν. В последнем случае, экспериментируя с частицами всевозможных разновидностей ($\nu = 1, 2, \ldots$), удастся выяснить, отличаются ли друг от друга численные значения ς_ν.

[11] Значение импульса объект-сигнала оказывается одним в системе отсчета отправителя и другим в системе отсчета получателя.

Предположим, что из результатов экспериментов с точечными частицами следуют зависимости, представленные кривыми на рис. 1. Видно, что $\varsigma_1 = \varsigma_2 = \ldots = \varsigma$; $\lim\limits_{P_x \to \infty} V_x = \varsigma$ для частиц любой разновидности. Предположим далее, что анализ кривых на рис. 1 приводит к соотношению

$$m_\nu = m_{0,\nu} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{P_x}{m_{0,\nu} \cdot \varsigma}\right)^2}, \tag{5}$$

которое представлено графически на рис. 2.

На основании результатов экспериментов можно сделать следующие выводы.

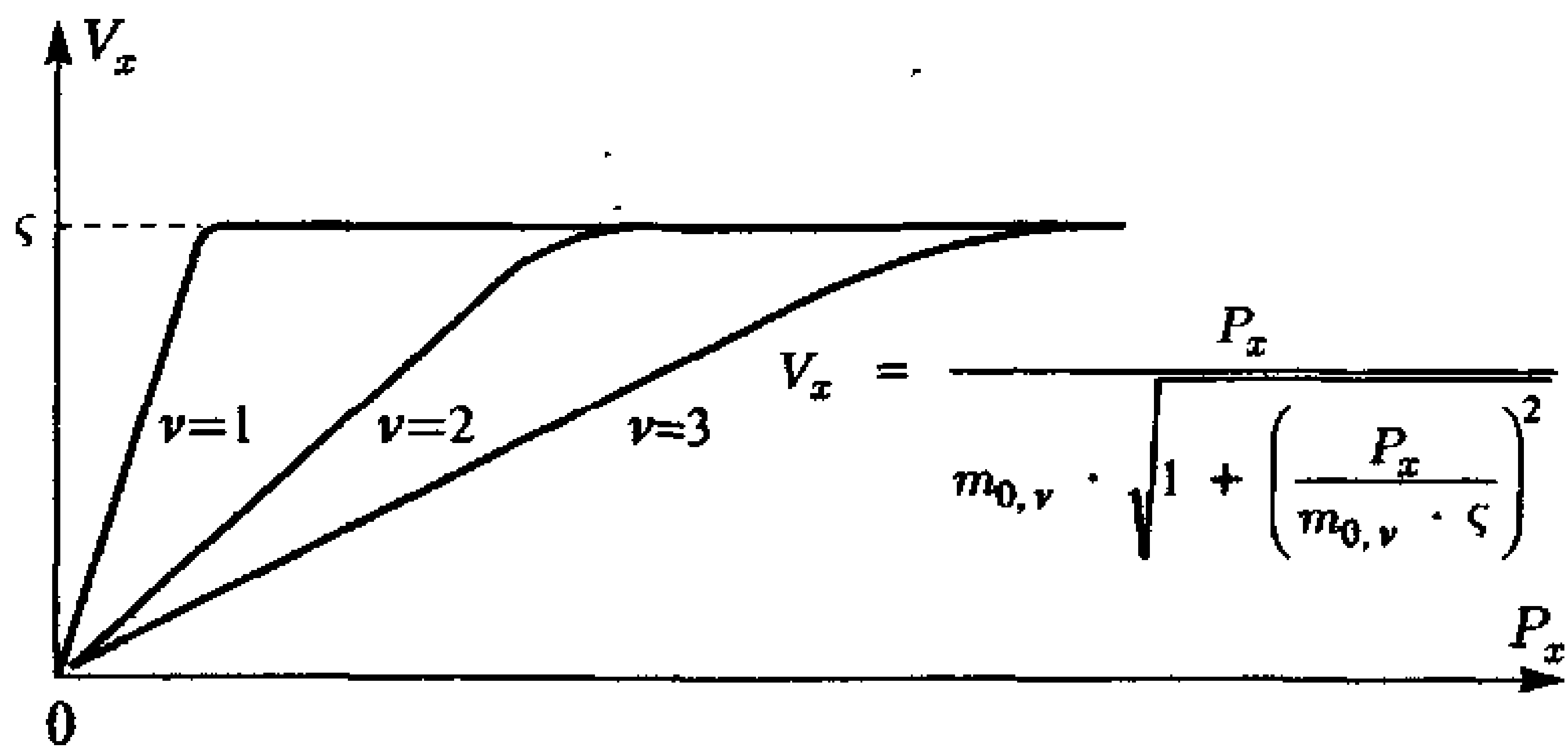

Рис. 1. Зависимость скорости частицы, движущейся равномерно и прямолинейно, от ее импульса. Цифры на кривых отвечают разновидностям частиц. (Следует учесть, что в рассматриваемом примере $\vec{P} = \vec{e}_x \cdot P_x$; $|\vec{P}| = |P_x|$.)

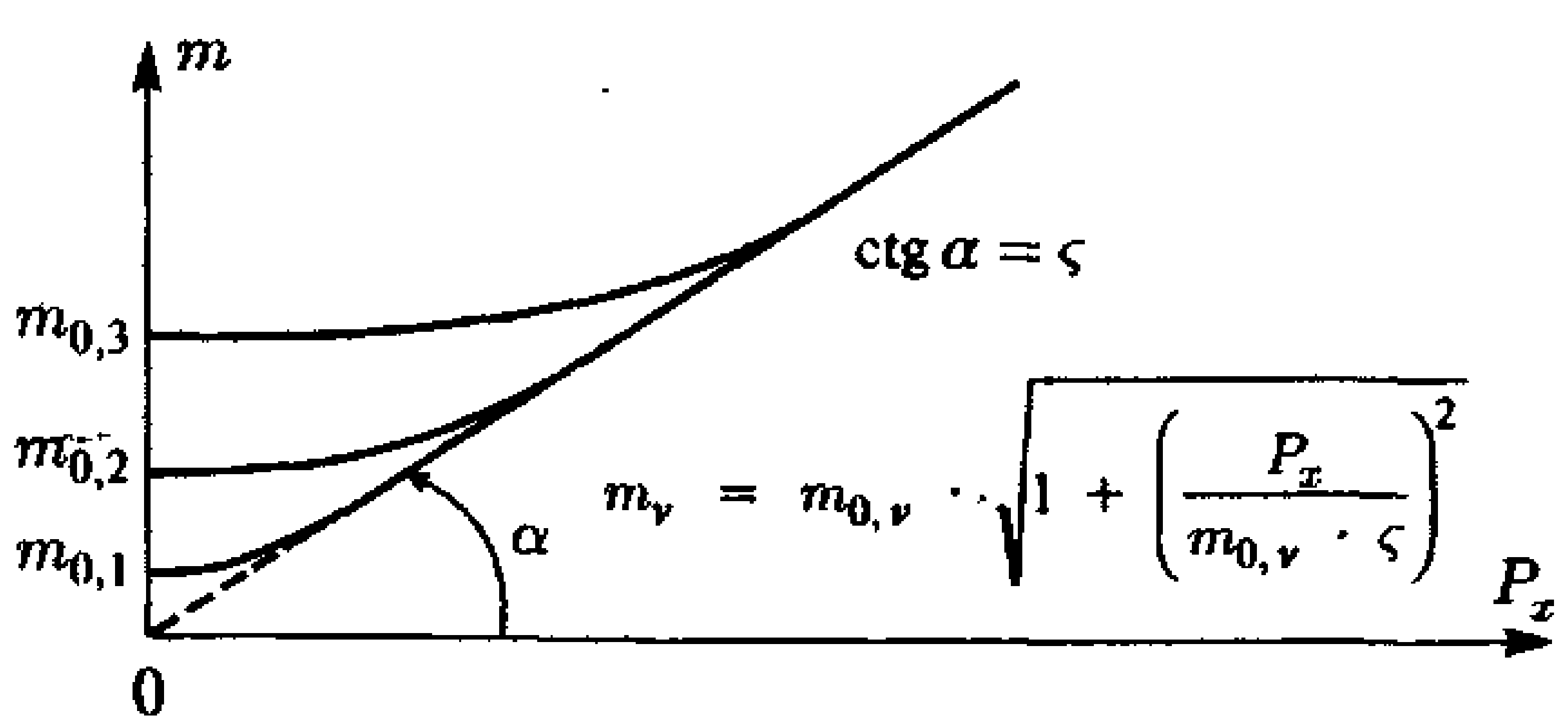

Рис. 2. Зависимость массы частицы ν-й разновидности от ее импульса.

1. Максимальная скорость прямолинейного и равномерного движения, которой может достичь точечная частица любой разновидности, ограничена сверху (значением ς).

2. Масса точечной частицы любой разновидности неограниченно возрастает с ростом ее импульса:

$$\lim_{P\to\infty} m_\nu = \lim_{P\to\infty}\left(\frac{P}{\varsigma}\right) = \infty.$$

3. Принадлежность точечной частицы к определенной разновидности проявляется только в той инерциальной системе отсчета, в которой импульс частицы $\vec{P}$ равен нулю:

$$\lim_{P\to 0} m_\nu = m_{0,\nu} \quad (m_{0,1} \neq m_{0,2} \neq \ldots).$$

4. Существует разновидность точечных частиц, масса покоя которых (величина m_0) ***точно равна нулю.*** Частица, принадлежащая к этой разновидности, — отныне именуемая безмассовой — обладает максимально возможной для частиц любых других разновидностей скоростью и при этом может обладать любым импульсом в пределах от нуля до бесконечности (рис. 3).

В последний раз, но все же хочется подчеркнуть:

во-первых, что максимально возможная скорость ς является совершенно самостоятельным понятием, и, поскольку она приписывается безмассовой частице, никакой массивный наблюдатель не может считаться способным двигаться относительно другого такого же наблюдателя со скоростью, равной ς;

во-вторых, что частица, обладающая максимальной скоростью, движется с одной и той же — этой самой максимальной — скоростью ς относительно любого массивного наблюдателя из бесконечно большого их числа, движущихся друг относительно друга во всевозможных направлениях со всевозможными скоростями в пределах от сколь угодно близких к нулю до сколь угодно близких к ς.

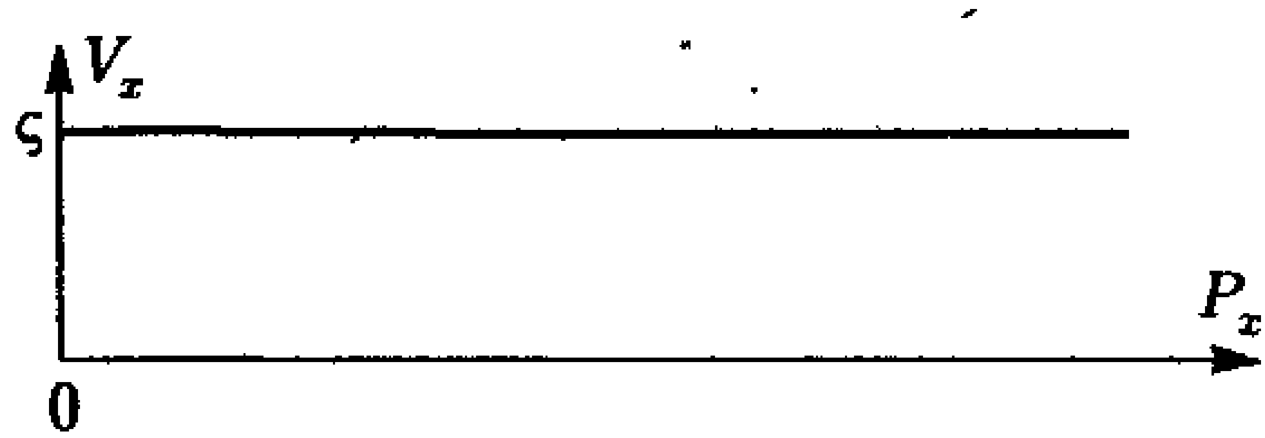

Рис. 3. Соотношение между импульсом и скоростью прямолинейного движения точечной безмассовой частицы.

Если бы только что упомянутая — безмассовая — частица обладала скоростью, равной ς относительно j-й системы отсчета, но большей ς относительно k-й системы, скорость, обозначенную символом ς, было бы бессмысленно называть максимальной. Стоит обратить внимание также и на то, что ***признание эквивалентности всех инерциальных систем отсчета несовместимо с понятием «максимальной скорости относительно лишь конкретной системы отсчета»***. Подобное понятие можно было бы считать содержательным, окажись численные значения этой «относительной максимальной» скорости разными в разных системах отсчета. Но тогда ни о какой эквивалентности инерциальных систем говорить бы не пришлось.

Таким образом, существование объект-сигнала с «особыми» свойствами, необходимого для экспериментального отбора группы формул преобразования, не противоречит логике. Этого достаточно, чтобы предпринять поиски подобного объекта. А поскольку он был найден, все, что произошло потом, вряд ли способно вызвать учащенное сердцебиение у сегодняшнего внимательного читателя. Просто выяснилось, что формулы преобразования всех характеристик, необходимых для описания состояния точечной частицы, ***действительно можно вывести путем рассуждений***, с обязательным привлечением объект-сигнала как средства обмена информацией между инерциальными наблюдателями. И сделал это в 1905 году А. Эйнштейн[12].

Итак, выяснилось, что придать формулировке ($П_р$3) принципа относительности помимо логической еще и физическую содержательность можно, только приняв еще один — четвертый — постулат. При этом допустимо: либо сразу постулировать явный вид формул преобразования всех физических характеристик, не ссылаясь ни на какой сигнал; ***либо постулировать существование объект-сигнала, обладающего «особыми» свойствами, а явный вид каждой из формул преобразования вывести.***

Подчеркну два обстоятельства.

Первое. Фактически, либо явный вид формул, либо свойства объект-сигнала приходится устанавливать экспериментальным путем. Тем не менее, на этапе построения ***логической структуры*** физической теории вполне можно обойтись без апелляции к эксперименту, попросту ***постулировав*** опять-таки либо явный вид формул, либо свойства сигнала. Такой путь построения физической теории можно было бы назвать логико-математическим. В этом случае, постулировав (придумав), например, сначала одну группу формул (галилееву), потом

[12] Формулы преобразования некоторых характеристик первым ввел, *но не вывел*, Г. Лоренц.

другую (лоренцеву), потом третью (придуманную) и т. д., можно построить разные теории и лишь затем обратиться к эксперименту с целью отобрать теорию, адекватную реальности.

Второе. Постулат, названный принципом относительности, состоит в признании эквивалентными всех инерциальных систем отсчета. А выражается эта эквивалентность в том, что классу инерциальных систем ставится в соответствие не что-нибудь, а именно вполне определенный — явный — вид формул преобразования каждой из физических характеристик, описывающих состояние точечной частицы. Только имея в виду это обстоятельство и установленную возможность выводить формулы преобразования путем рассуждений с обязательным использованием понятия об объект-сигнале, можно в качестве четвертого постулата частной теории относительности принять как раз тот, в котором делается утверждение о существовании объект-сигнала с требуемыми «особыми» свойствами[13]. Именно так и поступил А. Эйнштейн.

И вот, в связи с традиционной — эйнштейновской — формулировкой постулата «о скорости света» следует вспомнить вопрос, поставленный в § 1.3: *какое отношение имеет свет к механике точечных частиц?* Теперь можно дать вполне определенный ответ.

Совершенно безразлично, континуальный (свет) или точечный объект использовать в качестве сигнала, переносящего информацию, коль скоро используется этот сигнал ***только*** в рассуждениях, с помощью которых выводятся формулы преобразования физических величин, описывающих состояние ***точечной частицы***[14]. В этой связи волновать может лишь одно: существует ли в реальности точечная безмассовая частица, которая в дальнейшем использовалась бы в качестве сигнала, позволяющего вывести все формулы преобразования? Постулировать существование подобной частицы, конечно, можно, но есть ли для этого основания?

Здесь читателю предлагается немного отвлечься и обратиться к истории.

Экскурс в историю физики

Каким бы странным это ни показалось сейчас, но возможность существования точечной безмассовой частицы, автоматически обладающей скоростью,

---

[13] При этом оказывается, что использование понятия «максимально возможная скорость материального объекта» приводит к вполне определенному виду каждой из формул преобразования.

[14] Если ознакомиться с традиционными выводами, становится очевидным, что за используемым в них термином «свет» скрывается на самом деле световой импульс. То есть объект вовсе не протяженный в пространстве, а точечно-подобный, притом испускаемый и поглощаемый мгновенно.

равной ς в глазах любого инерциального наблюдателя, очень долго никому не приходила в голову, несмотря на признание научной общественностью формулы (5) *с* 1905 *года. А ведь уже из нее следовало, что* при $P \neq 0$ $\lim\limits_{m_0 \to 0} m = \left(\frac{P}{\varsigma}\right) \neq 0$.

В свою очередь, отсюда следовало, что если точечной частице приписать не только скорость ς, но еще и импульс (относительно какого угодно инерциального наблюдателя, лишь бы не связанного с самой частицей), то ее масса (масса движения, а не покоя) автоматически окажется отличной от нуля (опять же в глазах вышеупомянутого наблюдателя). Принято считать, что именно массой и отличается объект ***материальный****, существование которого по крайней мере допустимо, от такого —* ***придуманного*** *— объекта, существование которого в физической реальности вообще недопустимо.*

Помимо того, что возможность существования разновидности точечных «безмассовых» ($m_0 = 0$; $m \neq 0$) *частиц следовала из формулы* (5), *эта возможность следовала также из предложенного в* 1928 *году П. Дираком квантово-механического уравнения состояния свободной точечной частицы*[15]. *Но и на эту возможность внимания тогда также не обратили.*

В 1930 *году В. Паули доказал, что β-распад атомных ядер происходит с обязательным участием частицы (названной нейтрино), которая по крайней мере точечно-подобна и обладает массой покоя, по крайней мере не слишком сильно превосходящей массу покоя самой легкой из массивных частиц — электрона.*

В 1942 *году Д. Аллен в* ***косвенном*** *эксперименте обнаружил существование точечно-подобной частицы, которую вполне разумно было отождествить с нейтрино, но только предположив, что ее масса покоя* ***равна нулю точно.***

Лишь в 1953 *году Ф. Райнес и К. Коуэн уже* ***прямым*** *экспериментом доказали существование* ***точечной*** *частицы (антинейтрино),* ***масса покоя которой должна считаться равной нулю точно.***

[15] К этому уравнению П. Дирак пришел, исходя, по сути, дела из формулы (5). Это уравнение справедливо и когда $m_0 = 0$, и когда $m_0 \neq 0$.

Глава 4

Что именно должно было удивлять на этапе построения частной теории относительности

Давайте выясним, что же так удивило научную и просто образованную общественность после ознакомления с частной теорией относительности.

Сплошь и рядом встречается утверждение, что всех удивил факт относительности времени. Однако не кажется ли, что это могло произойти только за счет употребления неряшливой терминологии и снисходительного стиля объяснения? Разве не должен непредубежденный читатель воспринимать совершенно естественно именно ***относительность*** времени? В § 3.1 уже говорилось, что каждый из инерциальных наблюдателей, по определению ***вечно*** движущихся друг относительно друга, просто обязан считать «ход» своих часов отличным от «хода» чужих (см. с. 23). Ведь j-й наблюдатель сделал и отрегулировал свое изделие совершенно независимо от k-го. Чтобы синхронизовать часы после изготовления их каждым из наблюдателей, им потребуется объект-сигнал, обладающий бесконечно большой скоростью. Если таковой в распоряжении наблюдателей имеется, нет никакой проблемы в синхронизации часов, и время можно отнести к категории «абсолютных» понятий, вкладывая в этот эпитет совершенно определенный (отнюдь не мистический) смысл: когда стрелка часов одного инерциального наблюдателя совершила n оборотов и показывает, например, 17 часов, то ровно столько же оборотов совершила стрелка часов другого инерциального наблюдателя и показывает также 17 часов при условии, что оба наблюдателя ведут отсчет от общего начала. Но если не существует объект-сигнала, обладающего бесконечно большой скоростью, то синхронизация часов невозможна в принципе[1]. Иначе говоря, в этом

---

[1] Вот пример рассуждений j-го наблюдателя.

Если k-й наблюдатель находится вместе со мной в одной точке пространства, не нужен ***движущийся*** сигнал для обмена информацией. Если k-й наблюдатель находится вместе со мной в одной точке пространства сколь угодно долго, мы, конечно, можем сверить периоды своих часов и добиться их совпадения путем регулировки. Однако случае наблюдатели, вечно движущиеся друг относительно друга, оказываются лишенными *общего* эталона периода.

Совершенно аналогичные рассуждения следует провести в отношении измерений (обоими инерциальными наблюдателями) расстояний.

Конечно, тот факт, что расстояние от некоторой точки пространства до начала системы координат одного наблюдателя отличается от расстояния до начала системы координат другого наблюдателя, всегда воспринимался как тривиальный. Не столь сильно бросается в глаза иное обстоятельство, что наблюдатели измеряют расстояние — каждый — *своей* линейкой (своим «метром»), изготовленной независимо друг от друга. Тогда, если не существует объект-сигнала, обладающего бесконечно большой скоростью, наблюдатели, вечно движущиеся друг относительно друга, оказываются лишенными *общего* эталона длины.

Итак, не приходится удивляться ни относительности временного промежутка, ни относительности пространственного интервала[2].

Совсем другое дело — удивление тому, что может существовать точечная частица, движущаяся с *одинаковой* скоростью относительно каждой из двух систем отсчета, тоже движущихся друг относительно друга прямолинейно и равномерно.

В дорелятивистскую эпоху все были приучены к тому, что если скорость частицы в j-й системе равна $\vec{V}_j$, а j-я система движется относительно k-й со скоростью $\vec{V}_0$, то скорость частицы в k-й системе отсчета равна, например, $\vec{V}_k = \vec{V}_j - \vec{V}_0$. Однако непредубежденному читателю стоит задуматься над происхождением этой формулы. *Она вовсе не является продуктом чисто логических* (разумеется, непротиворечивых) *рассуждений*. Иначе мы оказались бы перед лицом весьма парадоксального расхождения теории и эксперимента, если бы измерения не подтвердили справедливость упомянутой формулы. К счастью, она возникла — *на самом деле* — просто в результате обобщения данных большого числа измерений, проведенных, правда, в самых разных экспериментальных ситуациях. Именно последнее обстоятельство и придало обсуждаемой формуле чрезмерно большую убедительность. Тем не менее, в какой бы экспериментальной обстановке ни производились

если после этого k-й наблюдатель под действием хотя бы сколь угодно кратковременно приложенной к нему силы стал от меня удаляться, уже нельзя ручаться за то, что его часы, ускорявшиеся за время действия силы, не изменили свой «ход». Значит, потребуется сверка часов. А, поскольку часы k-го наблюдателя уже вечно удаляются, добиться совпадения периодов можно было бы лишь с помощью объект-сигнала, обладающего бесконечно большой скоростью.

[2] Никакой опасности из этих относительностей не следует, так как в распоряжении каждого из наблюдателей имеются формулы, связывающие величины t_j и $\vec{r}_j$ с величинами t_k и $\vec{r}_k$.

измерения всех трех скоростей, каждая из них измерялась с некоторой погрешностью, а потому хотя бы сейчас следует задуматься, не оказалось ли так, что в свое время была допущена суммарная погрешность измерения бóльшая, чем та разность скоростей (величина $|\vec{V}_j - \vec{V}_0|$), которая ***могла иметь место на самом деле.*** В таком случае, что абсурдного было бы, например, в предположении, что

$$V_{k,x} \neq (V_{j,x} - V_0), \quad \text{но } V_{k,x} = (V_{j,x} - V_0) \cdot f(V_{j,x}, V_0)$$

(где $f(V_{j,x}, V_0)$ — некоторая функция величин $V_{j,x}$ и V_0, а V_0 — относительная скорость движения k-й и j-й инерциальных систем отсчета вдоль общей X-оси).

На рис. 4 представлена та (конечно, качественная) зависимость $V_{k,x}$-компоненты скорости массивной точечной частицы от ее $V_{j,x}$-компоненты, — зависимость, которая считается на сегодня очень точной. Видно, что пока $V_{j,x} < V_0$, k-й и j-й наблюдатели фиксируют ***превышение*** разности $V_{j,x} - V_{k,x}$ над значением V_0[3], а когда $V_{j,x} > V_0$, эта разность ***неограниченно уменьшается*** с ростом величины $V_{j,x}$. Иными словами, несмотря на то, что инерциальные наблюдатели движутся друг относительно друга со скоростью V_0, частица представляется каждому из них обладающей уже ***почти одинаковой*** скоростью, если последняя достаточно велика (близка к ς). Если бы оказалось, что в действительности максимально возможная скорость точечной частицы не ограничена сверху, то при достижении скоростью $V_{j,x}$ значения ∞, естественно, и $V_{k,x} = \infty$. В этом случае равенство $V_{k,x} = (V_{j,x} - V_0) \cdot f(V_{j,x}, V_0)$ выродилось бы, конечно, в доэйнштейновское равенство $V_{k,x} = V_{j,x} - V_0$. Однако оказалось, что в действительности максимальное значение скорости ***прямолинейного и равномерного*** движения точечной частицы все же ограничено сверху. Численное значение этой — максимальной — скорости принципиальной роли не играет, почему и достаточно просто обозначить ее символом. Например, ς.

Таким образом, если признать, что упомянутое выше доэйнштейновское соотношение между скоростями есть попросту результат недостаточной точности измерений, то нечего удивляться и тому, что само различие в скоростях частицы (величина $V_{j,x} - V_{k,x}$) оказывается величиной ***переменной*** (а вовсе не равной всегда значению V_0). Далее, если признать, что не может быть ***двух*** истинных соотношений между скоростями, то как не должно удивлять существование в природе разновидности точечных частиц, способных двигаться (относительно ***какой-нибудь*** системы отсчета) ***только*** с максимальной скоростью (пусть,

[3] Интересно, всем ли это становилось очевидным после ***первоначального*** ознакомления с основами частной теории относительности.

например, $V_{j,x} = \left(V_{j,x}\right)_{\text{макс}} = \varsigma$), так, естественно, ***не должно вызывать удивления*** и то, что значение скорости подобной частицы ***одинаково в любой инерциальной системе отсчета*** (имеет место ***точное*** равенство $V_{k,x} = V_{j,x} = \varsigma$).

В заключение вернемся к замечанию (с. 32), что, окажись формула $\vec{V}_k = \vec{V}_j - \vec{V}_0$ выведенной путем чисто логических рассуждений (на самом деле она явилась всего лишь обобщением результатов экспериментов), мы столкнулись бы с трудно разрешимым парадоксом.

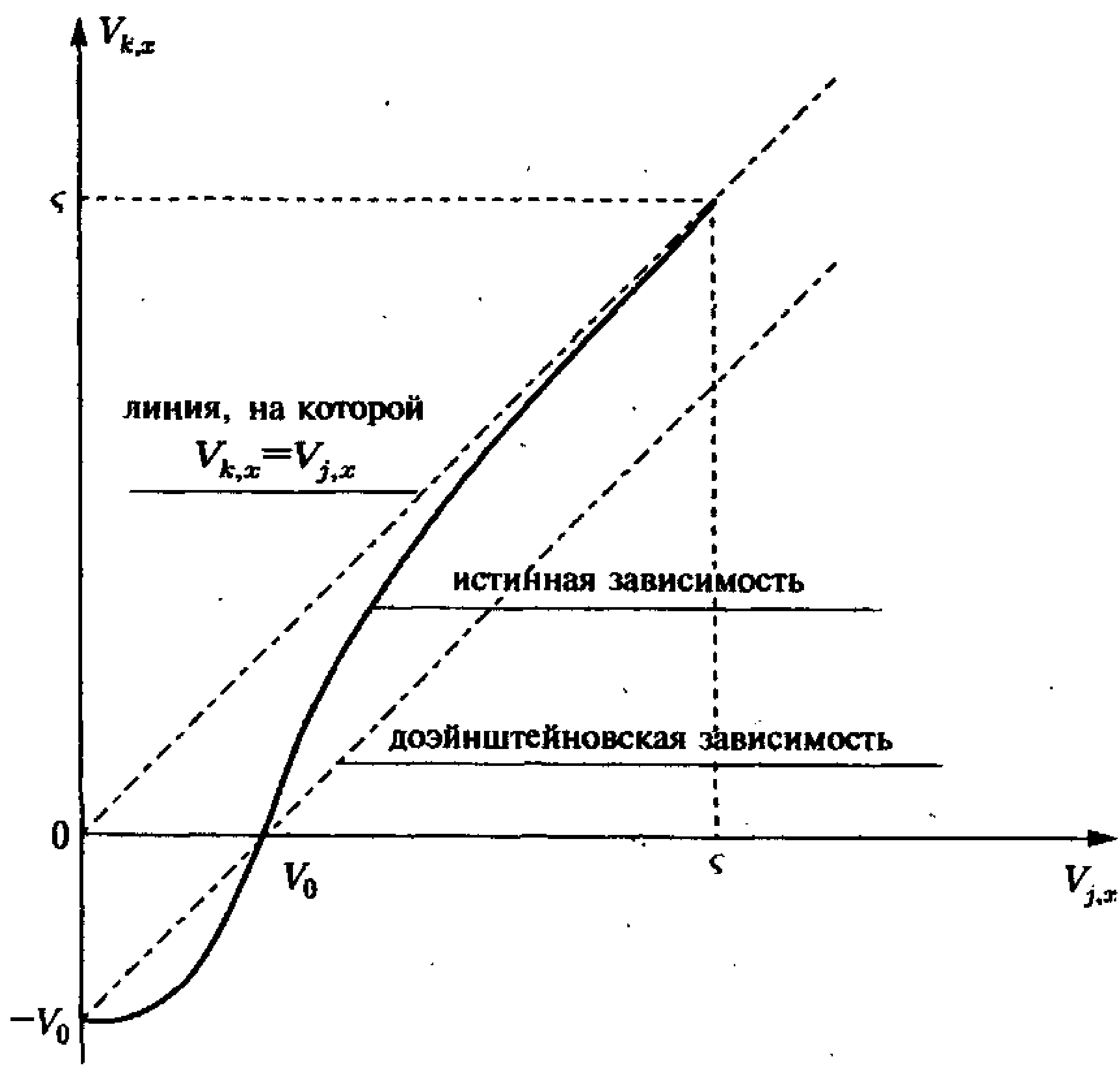

Рис. 4. Различные качественные зависимости скорости прямолинейного и равномерного движения массивной точечной частицы, измеренной k-м инерциальным наблюдателем, от скорости, измеренной j-м инерциальным наблюдателем.

Истинная зависимость заканчивается в точке с координатами (ς, ς).

Отметку ς можно смещать вдоль каждой из осей координат в любое место, следя лишь за тем, чтобы не нарушить неравенство $V_0 < \varsigma$.

Действительно, если рассуждения непротиворечивы, а признаваемые достаточно точными измерения тем не менее не соответствуют выводам из рассуждений, это ***не может не вызывать сильного удивления***. Ведь создается впечатление, что в противоречие с достоверными фактами вступила ***логика (!)***. Лишь позднее может прийти понимание, что логика оказывается не причем.

Вот, например, какое отношение могла иметь логика к обнаруженным со временем отклонениям от экспериментально установленного в 1827 г. Г. Омом соотношения $i = \frac{u}{r}$ (между током i, напряжением u и сопротивлением r) для резистивных элементов электрической цепи? Никакого. А тогда и не должно удивлять, что соответствующим физической реальности может оказаться (впоследствии) другое соотношение, — допустим, вида $i = \frac{u}{r} + \sigma \cdot u^3$ (где σ — некий коэффициент — еще одна характеристика резистора). Ведь может выясниться (впоследствии), что в природе просто не существует материалов, которым бы соответствовал именно закон Ома и притом пригодных для изготовления резистивных элементов.

Теперь, возвращаясь к формулам для скоростей, следует сказать так: не должно удивлять, что для всех без исключения точечных частиц, существующих в природе, экспериментально установленная доэйнштейновская зависимость $V_{k,x}\left(V_{j,x}\right)$ не является истинной. Так уж устроен мир. ***Удивлять может (если может) лишь то, что в природе не существует частиц, которые могли бы двигаться прямолинейно с бесконечно большой скоростью.***

Глава 5

Инварианты лоренцевой группы формул преобразования физических величин

5.1. Предварительные замечания

Согласно корректно сформулированному принципу относительности, эквивалентность различных инерциальных систем отсчета проявляется в соответствии всем им определенной группы формул преобразования каждой из физических величин, а вовсе не определенного вида соотношения (каждого из соотношений) между ними, признаваемого в качестве закона природы[1]. Сейчас предстоит доказать, что все подобные соотношения выводимы, поскольку они оказываются инвариантами группы формул преобразования.

Приняв в качестве адекватной реальности лоренцеву группу, выпишем ее формулы, считая две инерциальные системы отсчета (j-ю и k-ю) вечно движущимися друг относительно друга со скоростью V_0 вдоль общей X-оси, имея оси Y_j и Y_k (Z_j и Z_k) параллельными. Момент совпадения начал пространственных координат принимается за начало отсчета времени, так что в каждой из систем момент времени t выступает в качестве временно́го *промежутка* вне зависимости от своего численного значения (пусть даже бесконечно малого).

---

[1] Конечно, на самом деле механика развивалась иначе. Сначала были установлены соотношения, которые, как считалось на момент установления, выражали именно законы природы. Формулы же преобразования физических величин, если так можно выразиться, создавали, причем с условием, чтобы вид формул не противоречил установленным соотношениям. Поэтому и не могло возникнуть представление о *различных* группах формул. Таковое появилось лишь в результате работ Г. А. Лоренца, после чего стала очевидной «обратная» возможность — вывода тех соотношений, которые следовало считать выражающими законы природы только потому, что они оказывались инвариантными относительно преобразований группы. Вот тогда-то и возникла необходимость решать, какую же из групп — прежнюю (галилееву) или новую (лоренцеву) признать адекватной физической реальности. Посчитав таковой последнюю, пришлось отказаться считать выражающими законы природы некоторые из соотношений, которым этот статус был придан ранее на основании экспериментов (выполняемых всегда с ограниченной точностью). Подчеркну, что подобный отказ выглядел чрезвычайно смелым поступком, ибо еще не мог быть обоснован ссылками на более тщательный эксперимент. Мотивировкой была только выявленная неинвариантность *прежних* соотношений относительно преобразований *новой* — лоренцевой — группы формул.

Далее, символами x_j, y_j, z_j обозначаются координаты точки пространства (в j-й системе отсчета), в которой может оказаться частица в момент времени t_j (по часам j-го наблюдателя). То же самое касается величин x_k, y_k, z_k, t_k по отношению к k-му наблюдателю.

Формулы преобразования физических величин

$x_k = \eta \cdot (x_j - V_0 \cdot t_j)$ (здесь и далее $\eta \equiv \left(1 - \frac{V_0^2}{\varsigma^2}\right)^{-1/2}$ — параметр преобразования, значение которого может быть любым в пределах от 1 до ∞, так как абсолютное значение величины V_0 может быть любым в пределах от 0 до ς);

$y_k = y_j$; $z_k = z_j$;

$t_k = \eta \cdot \left(t_j - \frac{V_0}{\varsigma^2} \cdot x_j\right) = \eta \cdot t_j \cdot \left(1 - \frac{V_0 \cdot V_{j,x}}{\varsigma^2}\right)$ [2];

$P_{k,x} = \eta \cdot \left(P_{j,x} - \left(\frac{V_0}{\varsigma^2}\right) \cdot E_j\right) = \eta \cdot (P_{j,x} - V_0 \cdot m_j)$;

$P_{k,y} = P_{j,y}$; $P_{k,z} = P_{j,z}$;

$E_k = \eta \cdot (E_j - V_0 \cdot P_{j,x}) = \eta \cdot E_j \cdot \left(1 - \frac{V_0 \cdot V_{j,x}}{\varsigma^2}\right)$

(здесь E — *кинетическая* энергия точечной частицы);

$m_k = \eta \cdot m_j \cdot \left(1 - \frac{V_0 \cdot V_{j,x}}{\varsigma^2}\right) = \eta \cdot \left(m_j - \frac{V_0 \cdot P_{j,x}}{\varsigma^2}\right)$;

$V_{k,x} = \frac{\varsigma^2 \cdot (V_{j,x} - V_0)}{\varsigma^2 - V_0 \cdot V_{j,x}}$; $V_{k,y} = \frac{\varsigma^2 \cdot V_{j,y}}{\eta \cdot (\varsigma^2 - V_0 \cdot V_{j,x})}$; $V_{k,z} = \frac{\varsigma^2 \cdot V_{j,z}}{\eta \cdot (\varsigma^2 - V_0 \cdot V_{j,x})}$

(три последние формулы преобразований проекций скорости справедливы при условии, что $V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 \leqslant \varsigma^2$).

Необходимо обратить внимание на следующие обстоятельства:

1) Все формулы преобразований физических характеристик точечной частицы должны считаться либо установленными непосредственно экспериментальным путем, либо выведенными с помощью рассуждений, в которых существенно использовалась экспериментально же установленная возможность отправлять и принимать объект-сигнал с требуемыми для обмена информацией (между двумя инерциальными наблюдателями) свойствами;

2) Каждая из формул может рассматриваться как установленная независимо от остальных;

---

[2] Интерпретация этой формулы состоит в следующем. Учитывая принципиальную невозможность синхронизации часов, j-й наблюдатель считает, что, когда по *его* (j-м) соображениям частица в момент t_j находится в точке пространства, X-координата которой равна x_j, часы k-го наблюдателя обязаны показывать, что наступил момент времени t_k, равный $\eta \cdot \left(t_j - \frac{V_0}{\varsigma^2} \cdot x_j\right)$. Совершенно аналогично рассуждает k-й наблюдатель.

3) Поскольку $\eta \equiv \eta\left(V_0, \varsigma^2\right)$, во всех формулах вместо величины η параметрами преобразований можно считать две независимые величины V_0 и ς^2.

4) Формулы преобразования скоростей совершенно одинаковы как для мгновенных скоростей (когда в обеих частях равенств фигурируют в качестве скоростей величины $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$), так и для усредненных по пространству-времени (когда в качестве скоростей фигурируют величины $\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}$)[3].

5.2. *Два типа инвариантов*

Инварианты можно искать методом проб и ошибок, подвергая проверке ***придумываемые*** конструкции. Рассмотрим две из них:

$$\left\{\varsigma^2 \cdot t_k^2 - x_k^2 - y_k^2 - z_k^2\right\}; \quad \left\{E_k^2 - \varsigma^2 \cdot \vec{P}_k^2\right\}.$$

Выразив k-е величины через j-е, находим, что

$$\left\{\varsigma^2 \cdot t_k^2 - x_k^2 - y_k^2 - z_k^2\right\} = \left\{\varsigma^2 \cdot t_j^2 - x_j^2 - y_j^2 - z_j^2\right\}; \tag{6}$$
$$\left\{E_k^2 - \varsigma^2 \cdot \vec{P}_k^2\right\} = \left\{E_j^2 - \varsigma^2 \cdot \vec{P}_j^2\right\}.$$

Следовательно, каждая из конструкций является инвариантом. Выбрав для его обозначения символ Inv, напишем

$$\left\{\varsigma^2 \cdot t^2 - x^2 - y^2 - z^2\right\} = \mathrm{Inv}_1; \quad \left\{E^2 - \varsigma^2 \cdot \vec{P}^2\right\} = \mathrm{Inv}_2.$$

Пусть оба наблюдателя следят за свободно движущейся частицей. Пусть, простоты ради, в момент $t_j = 0$ (при этом и $t_k = 0$) частица находится в центре j-й системы координат (при этом частица оказывается и в центре k-й системы координат). Тогда в каждой из систем: $x = V_x \cdot t$, $y = V_y \cdot t$, $z = V_z \cdot t$, где $\{x, y, z\}$ — координаты точки пространства, в которой в момент t присутствует свободная частица, движущаяся со скоростью $\vec{V}$. В этом случае равенство (6) можно представить в виде

$$\left(\varsigma^2 - V_{k,x}^2\right) \cdot t_k^2 - \left(V_{k,y}^2 + V_{k,z}^2\right) \cdot t_k^2 = \left(\varsigma^2 - V_{j,x}^2\right) \cdot t_j^2 - \left(V_{j,y}^2 + V_{j,z}^2\right) \cdot t_j^2. \tag{7}$$

[3] Следует помнить, что формулы лоренцевой группы справедливы при условии (заранее принятом), что $t_j \equiv \Delta t_j$; $t_k \equiv \Delta t_k$ (см. с. 36).

Пусть, опять-таки простоты ради, $V_y = 0$, $V_z = 0$, после чего равенство (7) сводится к виду

$$\left(\varsigma^2 - V_{k,x}^2\right) \cdot t_k^2 = \left(\varsigma^2 - V_{j,x}^2\right) \cdot t_j^2. \tag{8}$$

Вполне возможно, что в какой-то реальной ситуации частица обладала такой скоростью, что в глазах каждого из наблюдателей

$$\left(\varsigma^2 - V_{k,x}^2\right) \cdot t_k^2 = \left(\varsigma^2 - V_{j,x}^2\right) \cdot t_j^2 = 777 \text{ см}^2.$$

Однако вполне возможно, что в другой ситуации

$$\left(\varsigma^2 - V_{k,x}^2\right) \cdot t_k^2 = \left(\varsigma^2 - V_{j,x}^2\right) \cdot t_j^2 = 0{,}777 \text{ см}^2,$$

ведь скорость свободной частицы (V_x) ни от чего не зависит: это — величина *назначенная*.

Таким образом, численное значение инварианта Inv_1 может быть любым в пределах от 0 до ∞. Вот поэтому и нельзя признать подобного типа инвариант выражающим закон природы.

Рассмотрим теперь инвариант $\left\{E^2 - \varsigma^2 \cdot \vec{P}^2\right\}$. Только при одном условии его численное значение можно считать константой: если считать, что кинетическая энергия (E) свободной точечной частицы конкретной разновидности является, что весьма логично, функцией ее импульса ($\vec{P}$). Тогда, конечно, разность $\left\{E^2\left(\vec{P}\right) - \varsigma^2 \cdot \vec{P}^2\right\}$, в соответствии с самим смыслом понятия функции, не может не быть вполне определенной величиной. Обозначив ее символом $E_{0,\nu}^2$, представим лоренц-инвариантное соотношение между величинами E и $\vec{P}$ в виде

$$\left\{E^2\left(\vec{P}\right) - \varsigma^2 \cdot \vec{P}^2\right\} = \mathrm{Inv}_2 \equiv E_{0,\nu}^2, \tag{9}$$

где индекс ν символизирует разновидность частиц. Вот такое соотношение *просто необходимо* считать выражающим закон природы для частиц ν-й разновидности.

Разумеется, только эксперимент позволяет ответить на вопрос, является или не является инвариант $\left\{E^2\left(\vec{P}\right) - \varsigma^2 \cdot \vec{P}^2\right\}$, уже обозначенный символом $E_{0,\nu}^2$, численно одинаковым для *каждой* разновидности частиц, а если нет, то чему именно равна величина $E_{0,\nu}^2$ для конкретной разновидности. И вот, если оказывается, что существует разновидность частиц, для которой $E_{0,\nu}^2 \neq 0$, автоматически возникает необходимость физически содержательной интерпретации величины E_0. Эта проблема будет подробно рассмотрена и решена в гл. 6, а пока продолжим поиски других инвариантов, также отображающих законы природы.

5.3. Законы природы

Обратимся к конструкции $\left\{\frac{\vec{P}}{m}\right\}$. Выразив, уже традиционно, k-е величины через j-е, придем к соотношениям:

$$\frac{P_{k,y}}{m_k} = \frac{\left(\frac{P_{j,y}}{m_j}\right)}{\eta \cdot \left(1 - \frac{V_0 \cdot P_{j,x}}{\varsigma^2 \cdot m_j}\right)}; \tag{10}$$

$$\frac{P_{k,z}}{m_k} = \frac{\left(\frac{P_{j,z}}{m_j}\right)}{\eta \cdot \left(1 - \frac{V_0 \cdot P_{j,x}}{\varsigma^2 \cdot m_j}\right)}; \tag{11}$$

$$\frac{P_{k,x}}{m_k} = \frac{\eta \cdot \left(\frac{P_{j,x}}{m_j} - V_0\right)}{\eta \cdot \left(1 - \frac{V_0 \cdot P_{j,x}}{\varsigma^2 \cdot m_j}\right)} = \frac{\left(\frac{P_{j,x}}{m_j} - V_0\right)}{\left(1 - \frac{V_0 \cdot P_{j,x}}{\varsigma^2 \cdot m_j}\right)}. \tag{12}$$

Использовав формулу преобразования X-проекции скорости (см. с. 37), выразим V_0 через $V_{j,x}$ и $V_{k,x}$:

$$V_0 = \frac{\varsigma^2 \cdot (V_{j,x} - V_{k,x})}{\varsigma^2 - V_{j,x} \cdot V_{k,x}}.$$

Использовав уже эту формулу для исключения ***произвольного*** параметра V_0 из выражения (12), получим

$$\frac{P_{k,x}}{m_k} = \frac{\varsigma^2 \cdot P_{j,x} - P_{j,x} \cdot V_{j,x} \cdot V_{k,x} - \varsigma^2 \cdot m_j \cdot V_{j,x} + \varsigma^2 \cdot m_j \cdot V_{k,x}}{\varsigma^2 \cdot m_j - m_j \cdot V_{j,x} \cdot V_{k,x} - P_{j,x} \cdot V_{j,x} + P_{j,x} \cdot V_{k,x}},$$

откуда следует, что

$$\frac{P_{k,x} - m_x \cdot V_{k,x}}{\varsigma \cdot m_k - \frac{P_{k,x} \cdot V_{k,x}}{\varsigma}} = \frac{P_{j,x} - m_j \cdot V_{j,x}}{\varsigma \cdot m_j - \frac{P_{j,x} \cdot V_{j,x}}{\varsigma}} = \mathrm{Inv}_1.$$

Значение Inv_1 можно установить только из экспериментов.

1. Если окажется, что $\mathrm{Inv}_1 = 0$, то $V_x = \frac{P_x}{m}$. Подставляя это ***определение*** величины V_x в формулы (10) и (11), найдем сначала, что

$$1 - \frac{V_0 \cdot V_{j,x}}{\varsigma^2} = 1 - \frac{V_0 \cdot P_{j,x}}{\varsigma^2 \cdot m_j}.$$

Далее, использовав формулы преобразования Y- и Z-проекций скорости (см. с. 37), найдем, что

$$\eta \cdot \left(1 - \frac{V_0 \cdot P_{j,x}}{\varsigma^2 \cdot m_j}\right) = \begin{cases} \dfrac{V_{j,y}}{V_{k,y}}; \\ \dfrac{V_{j,z}}{V_{k,z}}. \end{cases}$$

Подставив эти соотношения в выражения (10) и (11), получим

$$\frac{P_{j,y}}{V_{j,y} \cdot m_j} = \frac{P_{k,y}}{V_{k,y} \cdot m_k} = \mathrm{Inv}_2; \quad \frac{P_{j,z}}{V_{j,z} \cdot m_j} = \frac{P_{k,z}}{V_{k,z} \cdot m_k} = \mathrm{Inv}_3.$$

Если в экспериментах выяснится, что при условии $\mathrm{Inv}_1 = 0$ два других инварианта равны единице ($\mathrm{Inv}_2 = \mathrm{Inv}_3 = 1$), частицу нужно будет отнести к категории тех, для которых справедливо *динамическое* определение *мгновенно-локальной* (как и импульс[4]) скорости в виде

$$V_x = \frac{P_x}{m}; \quad V_y = \frac{P_y}{m}; \quad V_z = \frac{P_z}{m}$$

или (что то же самое) в виде $\vec{V} = \dfrac{\vec{P}}{m}$.

2. Если окажется, что $\mathrm{Inv}_2 = \mathrm{Inv}_3 = 0$, а $\mathrm{Inv}_1 \neq 1$, последуют равенства:

$$P_y = P_z = 0; \quad P_x - m \cdot V_x = m \cdot \varsigma - \frac{P_x \cdot V_x}{\varsigma},$$

из которых, в свою очередь, последуют равенства

$$\frac{P_x}{m} = \varsigma; \quad \frac{|\vec{P}|}{m} = \varsigma.$$

Стало быть, частица относится к разновидности тех, для которых отношение модуля импульса $\vec{P}$ к массе m не зависит ни от импульса, ни от массы. Значит, для подобной частицы ***не существует динамического определения мгновенно-локальной скорости***, и ее можно частице лишь приписать; иначе говоря — постулировать, что значение мгновенно-локальной скорости частицы равно ς, а тогда, стало быть, оно равно ς относительно *любой* инерциальной системы отсчета и,

---

[4] Хотелось бы обратить внимание искушенного читателя на то, что в определенной обстановке, в которой может находиться частица, импульс может оказаться функцией *двух независимых* переменных: радиус-вектора и момента времени. Отмеченное обстоятельство играет очень важную роль в квантовой механике.

естественно, вне зависимости от значения импульса $\vec{P}$. Только после этого величину $\frac{\vec{P}}{m}$, модуль которой *«тоже оказался»* равным ς, можно посчитать скоростью частицы.

Обратимся теперь к конструкциям $\left\{\frac{\Delta x}{t}\right\}, \left\{\frac{\Delta y}{t}\right\}, \left\{\frac{\Delta z}{t}\right\}$ [5].

Выразив k-е величины через j-е, получим

$$\frac{\Delta y_k}{t_k} = \frac{\Delta y_j}{\eta\cdot\left(t_j - \frac{V_0}{\varsigma^2}\cdot\Delta x_j\right)};\quad \frac{\Delta z_k}{t_k} = \frac{\Delta z_j}{\eta\cdot\left(t_j - \frac{V_0}{\varsigma^2}\cdot\Delta x_j\right)};\quad \frac{\Delta x_k}{t_k} = \frac{\frac{\Delta x_j}{t_j} - V_0}{1 - \frac{V_0}{\varsigma^2}\cdot\frac{\Delta x_j}{t_j}}.$$

Выразив V_0 через $\langle V_{k,x}\rangle$, $\langle V_{j,x}\rangle$ (символ $\langle\ \rangle$ будет означать усреднение по пространству-времени[6]), получим

$$\frac{\langle V_{j,x}\rangle - \frac{\Delta x_j}{t_j}}{\left(\frac{\langle V_{j,x}\rangle}{\varsigma}\right)\cdot\left(\frac{\Delta x_j}{t_j}\right) - \varsigma} = \frac{\langle V_{k,x}\rangle - \frac{\Delta x_k}{t_k}}{\left(\frac{\langle V_{k,x}\rangle}{\varsigma}\right)\cdot\left(\frac{\Delta x_k}{t_k}\right) - \varsigma} = \mathrm{Inv}_1.$$

1. Если окажется, что $\mathrm{Inv}_1 = 0$, то $\langle V_x\rangle = \frac{\Delta x}{t}$, а тогда

$$\eta\cdot\left(1 - \frac{V_0}{\varsigma^2}\cdot\frac{\Delta x_j}{t_j}\right) = \eta\cdot\left(1 - \frac{V_0\cdot\langle V_{j,x}\rangle}{\varsigma^2}\right)$$

и, следовательно,

$$\frac{\Delta y_k}{t_k} = \frac{\Delta y_j}{t_j}\cdot\frac{1}{\eta\cdot\left(1 - \frac{V_0\cdot\langle V_{j,x}\rangle}{\varsigma^2}\right)};\quad \frac{\Delta z_k}{t_k} = \frac{\Delta z_j}{t_j}\cdot\frac{1}{\eta\cdot\left(1 - \frac{V_0\cdot\langle V_{j,x}\rangle}{\varsigma^2}\right)}.$$

---

[5] Обращаться к этим конструкциям вынуждает тот факт, что частица может двигаться относительно системы координат. В этом случае возможно, что, например,

$$x_j(t_j) = x_j(t_j = 0) + \int_0^{t_j} V_{j,x}(t'_j)\cdot dt'_j = x_j(t_j = 0) + \langle V_{j,x}\rangle\cdot t_j.$$

(Следует иметь в виду, что, как отмечалось в сноске 3) на с. 38, $t_j \equiv \Delta t_j$.)

[6] Учитывая сказанное в предыдущей сноске, все скорости мы теперь считаем усредненными по пространству-времени.

Используя в очередной раз формулы преобразования Y- и Z-проекций скорости, представим величину

$$\eta \cdot \left(1 - \frac{V_0 \cdot \langle V_{j,x} \rangle}{\varsigma^2}\right)$$

в виде

$$\eta \cdot \left(1 - \frac{V_0 \cdot \langle V_{j,x} \rangle}{\varsigma^2}\right) = \begin{cases} \dfrac{\langle V_{j,y} \rangle}{\langle V_{k,y} \rangle}; \\ \dfrac{\langle V_{j,z} \rangle}{\langle V_{k,z} \rangle}. \end{cases}$$

После этого оказывается, что

$$\frac{\Delta y_k}{t_k} = \frac{\Delta y_j}{t_j} \cdot \frac{\langle V_{k,y} \rangle}{\langle V_{j,y} \rangle}; \quad \frac{\Delta z_k}{t_k} = \frac{\Delta z_j}{t_j} \cdot \frac{\langle V_{k,z} \rangle}{\langle V_{j,z} \rangle}$$

или

$$\frac{\left(\dfrac{\Delta y_k}{t_k}\right)}{\langle V_{k,y} \rangle} = \frac{\left(\dfrac{\Delta y_j}{t_j}\right)}{\langle V_{j,y} \rangle} = \mathrm{Inv}_2; \quad \frac{\left(\dfrac{\Delta z_k}{t_k}\right)}{\langle V_{k,z} \rangle} = \frac{\left(\dfrac{\Delta z_j}{t_j}\right)}{\langle V_{j,z} \rangle} = \mathrm{Inv}_3.$$

Если при том, что $\mathrm{Inv}_1 = 0$, окажется, что $\mathrm{Inv}_2 = \mathrm{Inv}_3 = 1$, то $\langle V_y \rangle = \dfrac{\Delta y}{t}$; $\langle V_z \rangle = \dfrac{\Delta z}{t}$.

Соотношения $\langle V_x \rangle = \dfrac{\Delta x}{t}$; $\langle V_y \rangle = \dfrac{\Delta y}{t}$; $\langle V_z \rangle = \dfrac{\Delta z}{t}$ представляют собой *кинематические* определения проекций скорости, усредненной по временнóму промежутку[7].

Следовательно, частица относится к той разновидности, для которой эти определения справедливы. В этой связи имеет смысл вспомнить, что формулы (лоренцевой группы) преобразований величин Δx, Δy, Δz, t справедливы как для бесконечно малых, так и для сколь угодно больших значений этих величин. Поэтому нет ничего удивительного в «возникновении» формулы для скорости, усредненной по времени.

Сказанное может показаться тавтологией, коль скоро *«выведенные»* только что определения скоростей *основаны* на этих же самых определениях.

Однако целью «вывода» *является попытка* обратить внимание на то, что *данное ранее* (исходное) определение *теперь* уже должно быть

---

[7] Теперь для краткости вместо усреднения по пространству-времени будет говориться об усреднении по времени. В связи с этим см. Приложение 1.

признано истинным (законом природы), причем только потому, что оно оказалось инвариантным относительно преобразований лоренцевой группы формул.

2. Если выяснится, что $\mathrm{Inv}_1 = 1$, $\mathrm{Inv}_2 = \mathrm{Inv}_3 = 0$, то

$$\frac{\Delta y_k}{t_k} = \frac{\Delta y_j}{t_j} = 0; \quad \frac{\Delta z_k}{t_k} = \frac{\Delta z_k}{t_k} = 0; \quad \frac{\Delta x_k}{t_k} = \frac{\Delta x_j}{t_j} = \varsigma,$$

и, следовательно, $\dfrac{|\Delta\vec{r}|}{t} = \varsigma$ [8]. Тогда (по аналогии со сказанным ранее) частицу придется отнести к разновидности тех, которым среднюю по времени скорость нужно попросту приписать. Постулировав, что она равна ς относительно любой инерциальной системы отсчета, уже можно будет считать величину $\dfrac{|\Delta\vec{r}|}{t}$ значением средней по времени скорости подобной частицы. Совпадение отличных от нуля значений мгновенно-локальной скорости $\left(\dfrac{|\vec{P}|}{m} = \varsigma\right)$ и средней по времени $\left(\dfrac{|\Delta\vec{r}|}{t} = \varsigma\right)$ свидетельствует, что частица может двигаться только прямолинейно и равномерно.

В заключение, в качестве еще одного примера, установим соотношение между импульсом частицы и ее массой движения.

Пусть в j-й системе отсчета $P_{j,x} = P_{j,y} = P_{j,z} = 0$ $\left(V_{j,x} = V_{j,y} = V_{j,z} = 0\right)$. Согласимся с тем, чтобы назвать массу частицы, импульс $(\vec{P})$ которой равен нулю, массой покоя. Обозначим ее символом m_0. Согласно формулам преобразования массы и проекций импульса,

$$m_k = \eta \cdot m_j \cdot \left(1 - \frac{V_0 \cdot P_{j,x}}{m_j \cdot \varsigma^2}\right) = \eta \cdot m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{V_0^2}{\varsigma^2}}};$$

$$P_{j,y} = P_{k,y} = 0; \quad P_{j,z} = P_{k,z} = 0.$$

Выразив V_0 в виде

$$V_0 = \frac{\varsigma^2 \cdot \left(V_{j,x} - V_{k,x}\right)}{\varsigma^2 - V_{j,x} \cdot V_{k,x}} = \frac{\varsigma^2 \cdot \left(0 - \dfrac{P_{k,x}}{m_k}\right)}{\varsigma^2 - 0} = -\frac{P_{k,x}}{m_k},$$

---

[8] Величина $|\Delta\vec{r}|$ выступает в роли абсолютного значения пространственного интервала. Здесь имеет место частный случай, когда $|\Delta\vec{r}| = \Delta x$.

получим:

$$m_k^2 = \frac{m_0^2}{1 - \left(\frac{P_{k,x}}{m_k \cdot \varsigma}\right)^2},$$

откуда следует, что

$$m_k = m_0 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{P_{k,x}}{m_0 \cdot \varsigma}\right)^2}.$$

Поскольку в данном случае $P_{k,y} = P_{k,z} = 0$, и, следовательно, имеет место равенство $\vec{P}_k = \vec{e}_x \cdot P_{k,x}$, приходим к окончательному соотношению $m = m_0 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{P}{m_0 \cdot \varsigma}\right)^2}$, в котором P — модуль импульса.

В заключение имеет смысл подчеркнуть, что соотношения, признаваемые выражающими законы природы, были *выведены* с помощью *чисто математических* операций. Вот поэтому, несмотря на то, что каждая из входящих в любое конкретное соотношение величин (*кроме инварианта*) заранее отождествлена с физической характеристикой частицы, само выведенное соотношение *обязательно* нуждается в физически содержательной интерпретации.

Глава 6

Интерпретация соотношения $E^2 - \varsigma^2 \cdot \vec{P}^2 = E_0^2$

6.1. Постановка задачи

Прежде всего хотелось бы обратить внимание читателя на то, что в уже упоминавшемся соотношении (9), которое сейчас представляется в виде выражения

$$E^2 = \varsigma^2 \cdot \vec{P}^2 + E_0^2, \tag{13}$$

физической содержательностью обладает пока что только величина $\vec{P}$ — импульс точечной свободной частицы. Остальным величинам (E, E_0, ς) были даны (в 1905 году) на самом деле лишь названия, а не определения: ***полная энергия, энергия покоя, скорость света.*** Конечно, если к выражению (13) подходить с «математизированной» точки зрения, названия вообще не играют роли. Но тогда уж лучше не лицемерить вовсе: величину ς^2 назвать параметром лоренцевой группы формул преобразования, а величину E_0^2 — посчитать ***обозначением*** одного из инвариантов преобразований упомянутой группы.

Однако вопреки распространенному мнению, не только экспериментальная, но и теоретическая физика не сводится к математике[1].

---

[1] В связи с этим замечанием вниманию благосклонного читателя предлагается несколько цитат.

«По мнению Джинса, математические уравнения — единственное, что нам достоверно известно о явлениях физического мира. Урожай, венчающий все усилия в физике, — лишь набор математических формул; реальная сущность математической субстанции навсегда останется непознаваемой».

«...есть все основания утверждать, что новая физика — наука ...математическая...; "физическая реальность", которую описывают уравнения Максвелла, представляет собой смутное, "бесплотное" понятие электромагнитного поля».

«Возможно, Эддингтон прав, и знанием математических соотношений и структур исчерпывается все, чем может порадовать физическая наука. Джинс добавляет, что математическое описание Вселенной и есть окончательная реальность. Используемые нами для большей наглядности картины... — шаг в сторону от реальности».

(Цитаты из книги М. Клайна «Математика. Поиск истины». (М.: Мир, 1988. С. 253, 254). Д. Джинс и А. Эддингтон известны своими выдающимися достижениями в физике, астрофизике, астрономии)

А физика требует ответов на вопросы:

— *какое отношение имеет свет к точечной частице, которая к тому же считается* ***свободной****, то есть — пребывающей в* ***пустом*** *пространстве;*

— *можно ли отождествить величину,* ***названную*** *энергией* ***покоя****, с одной из таких, действительно* ***обладающих физической содержательностью*** *характеристик частицы, как* ***кинетическая и потенциальная энергии****?*

Следует принять во внимание, что если на второй вопрос будет дан ответ «нет», то возникнет поистине критическая ситуация: ведь помимо этих двух видов энергии другие науке неизвестны.

Решительного осуждения заслуживает — по отношению к точечной свободной частице — эпитет «***полная***», присвоенный энергии E.

Дело в том, что термин «***полная энергия***» применительно к ***точечной свободной*** частице лишен какой бы то ни было определенности. Физической содержательностью обладают такие понятия, как потенциальная и кинетическая энергия. Если точечная частица движется в силовом поле, то «***полной***» энергией нужно и можно называть ***сумму потенциальной*** энергии взаимодействия частицы с полем и ее ***кинетической*** энергии.

Можно тем не менее придать смысл такому понятию, как ***полная кинетическая*** энергия точечной частицы, если последняя участвует одновременно в движениях разного характера.

Можно придать смысл понятию ***полная потенциальная*** энергия точечной частицы, если она взаимодействует сразу с несколькими объектами (например, с силовыми полями различной природы). Что касается объекта ненулевых размеров, то такой объект может обладать «внутренней» потенциальной энергией взаимодействия ***частей*** друг с другом, даже если эти части не участвуют в движении и не взаимодействуют с внешним силовым полем.

Совершенно ясно, что ***точечная и свободная*** частица не может обладать потенциальной энергией: у нее нет частей, которые могли бы взаимодействовать друг с другом; она пребывает в пустом пространстве, в котором ей не с чем взаимодействовать. В таком случае величина E,

---

«Я убежден, что посредством чисто математических конструкций мы можем найти те понятия и закономерные связи между ними, которые дадут нам ключ к пониманию явлений природы».

(А. Эйнштейн; цитата из книги А. Пайса «Научная деятельность и жизнь Эйнштейна». (М.: Наука, 1989. С. 167))

Хотелось бы надеяться, что, прочтя этот параграф, читатель сможет сам оценить приведенные точки зрения на теоретическую физику.

фигурирующая в выражении (13), если и может быть полной, то лишь ***полной кинетической*** энергией.

6.2. Интерпретация знаменитого выражения

С помощью простых алгебраических преобразований выражение (13) можно представить в разных формах:

$$E = \begin{cases} \varsigma^2 \cdot m(P), \quad \text{где } m(P) = m_0 \cdot \sqrt{1 + \dfrac{P^2}{m_0^2 \cdot \varsigma^2}}; & (14,\text{а}) \\ \varsigma \cdot \sqrt{\vec{P}^2 + (m_0 \cdot \varsigma)^2}; & (14,\text{б}) \\ \dfrac{\vec{P}^2 + (m_0 \cdot \varsigma)^2}{m(P)}, & (14,\text{в}) \end{cases}$$

в которых E — полная кинетическая энергия свободной точечной частицы, причем, чтобы преждевременно не отвлекать внимания читателя, перед всей фигурной скобкой оставлен только знак «+»[2].

Легко видеть, что при $\vec{P} = 0$ любое из выражений (14) переходит в выражение

$$E\left(\vec{P} = 0\right) = E_0 = \frac{m_0^2 \cdot \varsigma^2}{m_0} = m_0 \cdot \varsigma^2 \neq 0. \qquad (15)$$

А поскольку, как уже было сказано, величина E (совпавшая теперь с величиной E_0) может быть только кинетической энергией, из выражения (15) следует, что вообще не существует инерциальной системы отсчета (не связанной с самой частицей), в которой выглядела бы покоящейся даже такая частица, масса «покоя» которой (m_0) ***отлична от нуля***[3].

Но это значит, что движение частицы, которому отвечает составляющая кинетической энергии $\dfrac{(m_0 \cdot \varsigma)^2}{m(P)}$, является «абсолютным». То есть

---

[2] Проблема знака действительно существует и будет подробно рассмотрена в гл. 10.

[3] Внимание искушенного читателя обращается на то, что, согласно традиционным представлениям, если масса покоя (m_0) объекта равна нулю, то не существует инерциальной системы отсчета (не связанной с самим объектом), в которой подобный объект выглядел бы покоящимся. Если же масса покоя ***не равна нулю, то существует инерциальная система*** (не связанная с самим объектом), ***в которой такой объект выглядел бы покоящимся***.

характер его должен быть одинаков с точки зрения *любого* инерциального наблюдателя[4]. Именно таким является равномерное вращение точечной частицы с орбитальной скоростью, модуль которой имеет одинаковое значение в глазах любого инерциального наблюдателя[5]. Поэтому предлагается постулировать, что

точечная частица, какой бы массой она ни обладала, вообще не может существовать иначе, как обязательно вращаясь — двигаясь по поверхности сферы, центр которой, в свою очередь, может как покоиться, так и двигаться относительно инерциальной системы отсчета. ($П_р5$)

Заметим, что упомянутый в постулате ($П_р5$) центр играет роль центра инерции *точечной* частицы. Он может двигаться со скоростью $\vec{V}_{ц.и.} = \dfrac{\vec{P}_{ц.и.}}{m_{частицы}(\vec{P}_{ц.и.})}$ как прямолинейно и равномерно, так и ускоренно, в том числе, в свою очередь, вращаясь вокруг пространственных осей. Во всех движениях (и в пустом пространстве, и в силовом поле) именно центру инерции переадресуется тот импульс $\vec{P}$, которым на самом деле обладает (от рождения) или который приобретает частица, и который *не* связан с только что постулированным *собственно*-орбитальным ее движением. Так что $\vec{P}_{ц.и.} \equiv \vec{P}$. Следует также учесть, что место присутствия центра инерции точечной частицы никогда не совпадает с местом присутствия самой частицы.

Итак, точечная свободная частица, вопреки традиционным представлениям, обладает как поступательной «степенью свободы» (ей отвечает кинетическая энергия $\dfrac{\vec{P}^2}{m(P)}$), так и вращательной (ей отвечает кинетическая энергия $\dfrac{(m_0 \cdot \varsigma)^2}{m(P)}$). Ясно теперь, что величина, обозначенная символом ς и присутствующая в соотношениях (13) и (14), вовсе не является скоростью света. Это скорость точечной частицы. А представляет ли собой величина ς абсолютное значение собственно-орбитальной или результирующей скорости, или значение проекции скорости на какую-либо из осей координат, так с этим еще предстоит разобраться.

---

[4] В той же степени *абсолютным* является прямолинейное и равномерное движение точечной частицы со скоростью, численное значение которой одно и то же в глазах *любого* инерциального наблюдателя.

[5] В таком случае модуль этой скорости должен быть равен константе ς, умноженной на некоторое число, возможно, и равное единице, а возможно, и нет.

Величина $m_0 \cdot \varsigma$, которую нередко называли «импульсом покоя» (совершенно бессмысленное сочетание слов), на самом деле представляет собой либо модуль собственно-орбитального импульса частицы, либо значение его проекции (и с этим предстоит разобраться). Следует также иметь в виду, что собственно-орбитальный импульс частицы, в отличие от импульса ее центра инерции $(\vec{P})$, не является самостоятельным (исходным, неопределяемым) понятием, а представляет собой произведение массы движения (зависящей от импульса $\vec{P}$) на собственно-орбитальную скорость[6].

6.3. Собственный механический момент (спин) точечной частицы

Приведенную в § 6.2 интерпретацию знаменитого эйнштейновского выражения для энергии — в любой из форм (14) — легко проверить «на прочность».

Дело в том, что, как выяснилось, эта интерпретация сводится к такому постулату — постулату ($\Pi_p 5$) — из которого, в свою очередь, следует, что точечная частица не может не обладать собственным механическим моментом (*спином*). И в связи с этим имеет смысл сделать небольшое отступление.

Механический момент не является самостоятельным физическим понятием. Обозначив его символом $\vec{L}$, определим его выражением $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$, где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки пространства, в которой присутствует частица; $\vec{P}$ — ее импульс.

*Будем называть механический момент **орбитальным** (сохранив за ним обозначение $\vec{L}$), если $\vec{P}$ — импульс именно центра инерции частицы; тогда $\vec{r}$ оказывается вектором, проведенным из начала системы координат, автоматически не совпадающего с центром собственно-орбитальной сферы, в центр этой сферы.*

Все сказанное полностью укладывается в давно сложившиеся представления. Но и спин точечной частицы необходимо уложить в них же, определив его выражением

$$\vec{S} = \vec{R} \times \vec{\mathcal{P}},$$

в котором $\vec{R}$ — радиус-вектор точки собственно-орбитальной сферы, проведенный из ее центра; $\vec{\mathcal{P}}$ — собственно-орбитальный импульс частицы. Что касается последнего, то уже говорилось, что он принципиально не может быть равным нулю. А вот тот факт, что $\vec{R} \neq 0$, следует из физически содержательного

---

[6] Таким образом, самостоятельными (неопределяемыми) понятиями являются: масса покоя, импульс центра инерции и собственно-орбитальная скорость (еще не получившая обозначения, ибо символом ς обозначено лишь ее *численное* значение). Определяемые с их помощью величины — это масса движения, скорость центра инерции и собственно-орбитальный импульс (еще не получивший обозначения).

понятия о вращении точечной частицы. Представление о вращении ***точечной частицы*** *вокруг оси,* ***проходящей через саму*** такую ***частицу***, *лишено физической содержательности.*

Как видим, рациональная интерпретация выражения (13) или, что то же самое, выражений (14) приводит к неравенству $\vec{S} \neq 0$. А поскольку еще в 1925 году под давлением экспериментальных данных точечной частице пришлось приписать спин, можно считать, что проверку «на прочность» рациональная интерпретация выдержала.

Сегодня, конечно, нет никакой необходимости сопоставлять предложение считать точечную частицу обладающей спином с результатами экспериментов. Однако такое требование выглядело бы вполне естественным в 1905 году, если бы А. Эйнштейн не ограничился выводом своего знаменитого выражения, а предложил бы еще и его физически содержательную интерпретацию.

Целесообразно подчеркнуть, что, вопреки традиционной точке зрения, ***лишается всякой физической содержательности представление о механическом моменте независимо от того, назвать его орбитальным или собственным (спином), если считать точечную частицу невращающейся.***

Заявления типа «собственный момент (спин) частицы не связан с ее движением в пространстве и принципиально не допускает классической (а попросту говоря, — наглядной) интерпретации» нельзя квалифицировать иначе, как словесное прикрытие отказа от интерпретации вообще[7].

---

[7] Для ознакомления читателя с традиционными представлениями о спине точечной частицы, ниже приводится несколько цитат.

«...элементарной частице следует приписывать некоторый "собственный" момент, не связанный с ее движением в пространстве. Это свойство является специфически квантовым...и потому принципиально не допускает классической интерпретации».

(Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1963. С. 227)

«Наличие спина у микрочастицы означает, что в некоторых отношениях она подобна маленькому вращающемуся волчку. Однако эта аналогия чисто формальная...Собственный момент, согласно квантовой теории, может быть у точечной частицы».

(Физика микромира. М.: «Советская энциклопедия», 1980. С. 36)

«...было бы совершенно бессмысленным представить себе "собственный" момент элементарной частицы как результат ее вращения вокруг "своей оси"».

(Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1963. С. 227)

«...часто встречающееся утверждение..., согласно которому "спин является чисто релятивистским эффектом", несостоятельно... Но утверждение Паули о спине как о "существенно квантово-механическом свойстве" продолжает оставаться справедливым, в чем легко убедиться, рассмотрев предельный случай $\hbar \to 0$».

(Джеммер М. Эволюция понятий квантовой механики. М.: Наука, 1985. С. 156)

Эрудированного читателя, возможно, сильно удивит тот факт, что представления о характере движения точечной частицы, возникшие в результате интерпретации выражения (13), оказались совершенно неожиданными. Однако на самом деле иначе быть не могло, и вовсе не из-за 90-летней задержки с самой интерпретацией.

Представим себе, что выражение (13) было установлено на основании экспериментальных данных. Тогда следовало бы принять во внимание, что, организуя эксперимент, мы сами создали обстановку, в которой частице пришлось пребывать. Обнаружив, что она вращается в ***пустоте***, можно, конечно, было бы удивиться, но не самому факту вращения (что есть, то и есть; значит так уж устроен мир), а тому, что вращение происходит ***в пустоте, в которой, по традиционным понятиям, частице не к чему притягиваться***. Можно было бы удивиться и, допустим, ***неожиданному*** соотношению между ***известными*** характеристиками вращающейся частицы. Увы, все было не так.

Выражение (13) было именно ***выведено*** — без всякого физического умысла — при ***математических*** операциях с формулами преобразования лоренцевой группы[8]. Но, поскольку ни одна из формул преобразования не содержит информации о характере движения частицы, извлекать ее приходится именно (и только) из ***выведенного*** выражения (13). В подобной ситуации ***впервые*** извлеченная информация вполне могла оказаться и оказалась очень неожиданной.

[8] Тот факт, что эти формулы были тоже выведены, не играет никакой роли. Они могли быть получены и экспериментальным путем. Важно лишь, что они оказались адекватными физической реальности.

Глава 7

Новые проблемы и их решения

*Предположение, что точечная частица вращается, **даже пребывая в пустом пространстве**, порождает ряд проблем, которые необходимо решить.*

7.1. Первая проблема

Чтобы выявить первую проблему, нужно отождествить себя с точечным наблюдателем (Ц-наблюдателем), расположившимся в центре (Ц) собственно-орбитального круга, через который проходят оси координат δ и γ (рис. 5). Простоты ради предлагается считать частицу вращающейся лишь в одной плоскости — плоскости рисунка.

Если поинтересоваться, какими понятиями должен оперировать Ц-наблюдатель, описывая вращение частицы по стационарной орбите-окружности, вряд ли кто-то решится исключить из их числа центростремительное ускорение. Однако если считать, что частица пребывает в ***пустом*** пространстве, где ей не к чему притягиваться, то о центростремительном ускорении ($\vec{a}_{цс}$) придется забыть. Ведь $\vec{a}_{цс} \propto \vec{F}_{цс}$, а в пустом пространстве центростремительной силе $\vec{F}_{цс}$ (силе притяжения частицы к центру собственной орбиты) неоткуда взяться ($\vec{F}_{цс} = 0$).

Таким образом, проблема действительно существует — в описании вращения частицы ***свободной***, пребывающей в ***пустом*** пространстве. Нужно суметь так описать вращение, чтобы не потребовалось прибегать к понятию «ускорение», чтобы исключить само представление о непрерывном изменении скорости частицы во времени[1].

Следует иметь в виду, что речь пока идет ***только об описании*** вращения, а не о том, чтобы объяснить, почему частица оказывается способной вращаться в ***пустом*** пространстве[2].

Давайте попробуем описать вращение частицы в плоскости. Вращение именно свободной частицы (по окружности) назовем собственным вращением, окружность эту — собственной орбитой и т. п. Затем вспомним, что новая интерпретация знаменитой формулы Эйнштейна (см. гл. 6) вынудила считать абсолютное значение собственно-орбитальной скорости частицы одинаковым в любой инерциальной системе

---

[1] Достаточно эрудированный читатель мог бы вспомнить, что именно этим отличается гамильтонов формализм квантовой механики.

[2] Объяснение содержится в Приложении 5.

отсчета. В таком, случае это значение не может не быть равным константе ς, умноженной на некоторое число (возможно, равное единице, а, возможно, и нет).

Теперь выдвигается фундаментальное предположение, что собственно-орбитальная скорость частицы в точке орбиты (см. рис. 5), оставаясь по абсолютному значению равной, допустим, $\sqrt{2}\varsigma$, с одинаковой вероятностью направлена как по радиусу к центру собственно-орбитального круга, так и перпендикулярно радиусу (например, по часовой стрелке).

$$\vec{R}_0 \times (m \cdot \vec{u}_\perp) = \text{const} \neq 0; \quad \vec{R}_0 \times (m \cdot \vec{u}_{\shortparallel}) = 0.$$

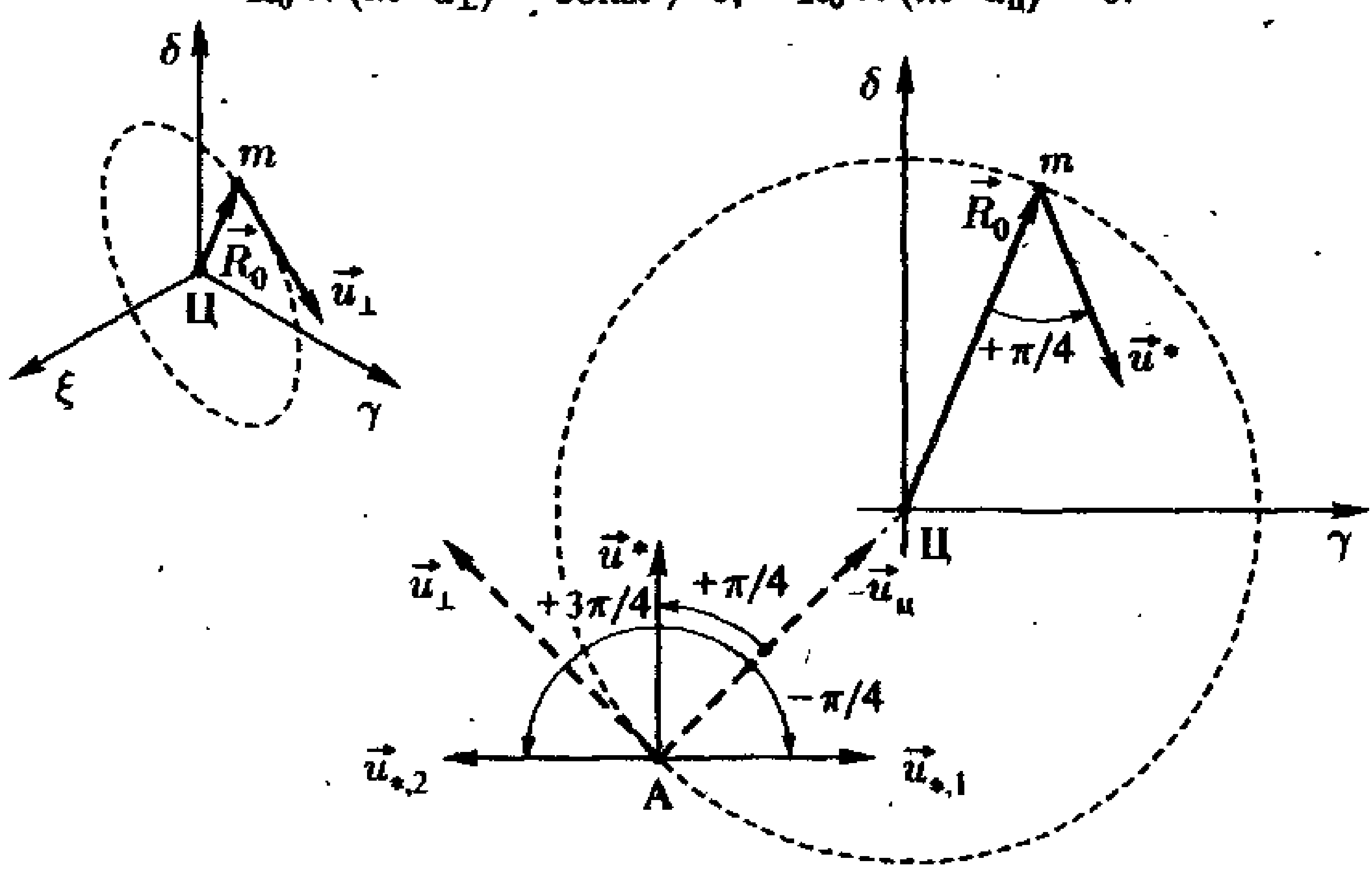

Рис. 5. Вращение точечной свободной частицы глазами Ц-наблюдателя.

Собственно-орбитальная скорость $\vec{u}_0$ в любой точке орбиты может быть с равной вероятностью направлена как по радиусу к центру (тогда она обозначена символом $\vec{u}_{\shortparallel}$), так и перпендикулярно радиусу (обозначена символом $\vec{u}_\perp$); при этом $|\vec{u}_\perp| = |\vec{u}_{\shortparallel}| = |\vec{u}_0| = \sqrt{2}\varsigma$.

В свою очередь, скорость $\vec{u}_\perp$ можно разложить на составляющие $\vec{u}^*$ и $\vec{u}_{*,2}$, а скорость $\vec{u}_{\shortparallel}$ на составляющие $\vec{u}^*$ и $\vec{u}_{*,1}$. Тогда можно считать, что собственно-орбитальная скорость $\vec{u}_0$ представляет собой сумму двух векторов. Один из них ($\vec{u}^*$) точно определен *и по модулю, и по направлению* (составляет угол $+\frac{\pi}{4}$ с радиусом $\vec{R}_0$ в любой точке орбиты). Другой ($\vec{u}_*$) точно определен по модулю, *но не по направлению* (составляет с радиусом $\vec{R}_0$ углы $-\frac{\pi}{4}$ и $+\frac{3\pi}{4}$ с равной вероятностью). При этом

$$\vec{u}_{\shortparallel} = \vec{u}_{*,1} + \vec{u}^*; \quad \vec{u}_\perp = \vec{u}_{*,2} + \vec{u}^*; \quad |\vec{u}^*| = |\vec{u}_*| = \varsigma.$$

Следует обратить внимание на то, что в механику приходится вводить, казалось бы, совершенно чуждое ей понятие «вероятность». Однако лишь таким путем удается сохранить за частицей право считаться свободной, но притом равномерно вращающейся по окружности (рис. 5).

Действительно, если вращающаяся частица существует вечно, то ***бесконечно много*** мгновений (хотя и разделенных равными промежутками времени) Ц-наблюдатель видит частицу (в точке А) обладающей скоростью всякий раз одной и той же как по абсолютному значению (равному $\sqrt{2}\varsigma$), так и по направлению (по радиусу в центр круга). Но именно у ***свободной*** частицы скорость ***вечно*** одна и та же и по абсолютному значению, и по направлению.

Однако в рамках выдвинутого предположения, кроме только что сделанного утверждения, столь же справедливо и другое: если вращающаяся частица существует вечно, то ***бесконечно много*** мгновений (хотя и разделенных равными промежутками времени) Ц-наблюдатель видит частицу (в точке А) обладающей скоростью всякий раз одной и той же как по абсолютному значению (равному $\sqrt{2}\varsigma$), так и по направлению (перпендикулярно радиусу и по часовой стрелке).

Тем не менее, считая (теперь уже ***обоснованно***) частицу свободной, Ц-наблюдатель замечает, что, в какой бы точке окружности ни представала перед его глазами частица, она обладает еще и вполне определенным — одним и тем же по абсолютному значению и по направлению — собственным механическим моментом (***спином*** $\vec{S}$), равным

$$\vec{S} = \vec{R}_0 \times (m \cdot \vec{u}_0)\,.$$

В этом выражении $\vec{R}_0$ — радиус-вектор точки собственной орбиты (рис. 5), а собственно-орбитальная скорость $\vec{u}_0$, согласно сделанному выше предположению, равна (см. рис. 5)

$$\vec{u}_0 = \begin{cases} \vec{u}_\perp \\ \vec{u}_{\text{ц}} \end{cases} \quad \text{с одинаковой вероятностью.}$$

Разумеется, $\vec{R}_0 \times (m \cdot \vec{u}_{\text{ц}}) = 0$, и потому

$$\vec{S} = \vec{e}_\xi \cdot S_\xi = \vec{R}_0 \times (m \cdot \vec{u}_\perp)\,,$$

где $\vec{e}_\xi$ — орт системы координат $\{\delta, \gamma, \xi\}$, проходящий через точку Ц перпендикулярно плоскости $\{\delta, \gamma\}$.

Итак, удалось совместить представление о точечной ***свободной*** частице с представлением о ее равномерном ***вращении*** по орбите определенного радиуса.

Напоследок — два замечания.

1. Хотя из приведенных выше рассуждений следует, что в любой момент времени существования частицы $S_\xi = \text{const} \neq 0$, отсюда еще не следует, что величина S_ξ является инвариантом лоренцевой группы. Нужно еще доказать, что это так и есть.

2. Обладание спином отражает факт обязательного участия точечной частицы во вращении по ***собственной*** орбите.

7.2. Вторая проблема

Вторая проблема состоит в необходимости объяснить, почему собственно-орбитальной скорости $\vec{u}_0$ нужно было приписать значение $\sqrt{2}\varsigma$ (а не, например, ς)[3]. Вызвано это, в свою очередь, необходимостью предотвратить нарушение предварительного условия применимости формул преобразования, принадлежащих группе Лоренца и, в частности, формул преобразования скорости. Условие это, приспособленное к нашему двумерному случаю, должно было бы иметь вид

$$V_\delta^2 + V_\gamma^2 \leqslant \varsigma^2, \tag{16}$$

где V_δ и V_γ — проекции скорости частицы на оси координат Ц-наблюдателя.

Однако для частицы, значение скорости которой одинаково для любого инерциального наблюдателя (к ним относится и Ц-наблюдатель), нужно убрать из соотношения (16) знак $<$, после чего условие, за соблюдением которого далее придется следить, принимает вид

$$V_\delta^2 + V_\gamma^2 = \varsigma^2. \tag{17}$$

Теперь следует учесть, что частицу, значение скорости которой точно равно ς, ***приходится*** считать свободной. Разумеется, никогда раньше не возникало и тени сомнения в том, что ***свободная*** частица может двигаться ***только прямолинейно и равномерно***, существуя вечно и пребывая в бесконечно протяженном пустом пространстве. А тогда

---

[3] Скорости $u_\perp$ (а тем самым и скорости u_0) можно дать кинематическое определение, используя систему отсчета, начало пространственных координат которой совпадает с центром собственно-орбитального круга. В этой системе

$$u_\perp = \frac{2\pi \cdot R_0}{\tau_0} = R_0 \cdot \omega_0,$$

где R_0, τ_0, ω_0 — значения радиуса собственной орбиты и собственных периода и частоты вращения в глазах Ц-наблюдателя.

должно иметь место совпадение скоростей *мгновенной* ($\vec{V}(t)$) и *усредненной по бесконечно продолжительному промежутку времени* ($\langle\vec{V}\rangle_{\Delta t}$)[4].

Таким образом, получается, что для свободной частицы, обладающей скоростью ς, должны быть справедливы равенства

$$\langle\vec{V}\rangle_{\Delta t} = \vec{V}(t) \equiv \vec{V}; \tag{18, а}$$

$$|\vec{V}| = \varsigma. \tag{18, б}$$

Как уже говорилось в гл. 3, существование материального объекта, обладающего скоростью, по модулю точно равной ς, и способного двигаться *прямолинейно и равномерно*, есть необходимое условие, либо оправдывающее вывод формул преобразования физических величин (при переходах от одной системы отсчета к другой), либо позволяющее экспериментально установить вид этих формул.

Что же касается собственно-орбитальной скорости *вращательного* движения точечной частицы, то хотя и потребовалось постулировать одинаковость абсолютного значения и этой скорости для любого инерциального наблюдателя, но совершенно необязательно требовать совпадения этого значения с величиной ς. Ведь не в результате собственного вращения частицы перемещается информация (сигнал) между инерциальными наблюдателями (движущимися друг относительно друга прямолинейно и равномерно).

Поэтому для вращающейся частицы можно изменить условие (17) так, чтобы новое условие, с одной стороны, не затрагивало проверенные формулы преобразования физических величин, а с другой стороны, не мешало при необходимости приписать модулю собственно-орбитальной скорости значение, отличное от ς.

Модификация условия (17) оказывается допустимой, поскольку фигурирующие в этом условии величины V_δ, V_γ на самом деле полностью еще не определены. Чтобы ликвидировать этот недостаток, придется взять на себя смелость отождествить их со скоростями, *усредненными по времени*. Тогда можно предложить для случая частицы, свободной, но вращающейся по собственной орбите, например, такую модификацию условия (17):

$$\begin{aligned}&(\langle u_\delta\rangle_{\Delta t})^2 + (\langle u_\gamma\rangle_{\Delta t})^2 = \\ &= \left(\langle u_\delta^*(\delta,\gamma) + u_{*,\delta}(\delta,\gamma)\rangle_{\Delta t}\right)^2 + \left(\langle u_\gamma^*(\delta,\gamma) + u_{*,\gamma}(\delta,\gamma)\rangle_{\Delta t}\right)^2 = \varsigma^2,\end{aligned} \tag{19}$$

---

[4] $\langle\vec{V}\rangle_{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to\infty}\left(\dfrac{1}{\Delta t}\cdot\displaystyle\int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}}\vec{V}(t)\cdot dt\right)$. См. также Приложение 1.

где u_δ^*, u_γ^*, $u_{*,\delta}$, $u_{*,\gamma}$ — проекции составляющих собственно-орбитальной скорости ($\vec{u}_0$) частицы, наблюдаемой всякий раз в одной и той же точке собственной орбиты (теперь точка А не считается обязательно расположенной именно там, где она показана на рис. 5).

Поскольку в любой точке орбиты составляющая $\vec{u}_*(t)$ равное число мгновений направлена в противоположные стороны, а составляющая $\vec{u}^*(t)$ — всегда в одну сторону, оказывается, что

$$\left\langle u_\delta^*(\delta,\gamma) + u_{*,\delta}(\delta,\gamma)\right\rangle_{\Delta t} = \left\langle u_\delta^*(\delta,\gamma)\right\rangle_{\Delta t} = u_\delta^*(\delta,\gamma,t),$$
$$\left\langle u_\gamma^*(\delta,\gamma) + u_{*,\gamma}(\delta,\gamma)\right\rangle_{\Delta t} = \left\langle u_\gamma^*(\delta,\gamma)\right\rangle_{\Delta t} = u_\gamma^*(\delta,\gamma,t) \text{ [5]},$$

откуда и следует возможность приравнять абсолютное значение составляющей $\vec{u}^*$ величине ς:

$$(\vec{u}^*(\delta,\gamma,t))^2 = (u_\delta^*(\delta,\gamma,t))^2 + \left(u_\gamma^*(\delta,\gamma,t)\right)^2 = \varsigma^2.$$

Как видим, именно условие (19) согласуется с новыми представлениями о собственном вращении свободной частицы. Но при этом автоматически

$$|\vec{u}_0(\delta,\gamma,t)| = \sqrt{(\vec{u}^*(\delta,\gamma,t))^2 + (\vec{u}_*(\delta,\gamma,t))^2} = \sqrt{\varsigma^2 + (\pm\varsigma)^2} = \sqrt{2}\varsigma. \quad (20)$$

Следует принять во внимание, что в реальном — трехмерном — пространстве $|\vec{u}_0(\delta,\gamma,\xi,t)| = \sqrt{3}\varsigma$, но по-прежнему лишь ***одна*** из составляющих собственно-орбитальной скорости (***уже из трех***) точно определена как по абсолютному значению (равна ς), так и по направлению. Ведь необходимо учесть еще и то, что в трехмерном пространстве частицу придется считать вращающейся вокруг любой из ***трех физически идентичных*** осей (δ,γ,ξ), естественно, с равной вероятностью. По этой причине точно определенной и по модулю, и по направлению оказывается лишь одна из трех проекций спина.

Наконец, еще одно замечание стоит сделать прежде, чем переходить к дальнейшему изложению.

Если преследовать цель постоянно подчеркивать наличие у точечной свободной частицы собственного механического момента (спина)[6], допустимо считать частицу:

а) обладающей только такой собственно-орбитальной скоростью ($\vec{u}_\perp$), ***которая всегда и во всех точках собственной орбиты перпендикулярна радиусу орбиты; в таком случае придется считать точно опре-***

---

[5] Имеются в виду те моменты времени, в которые частица появляется перед глазами Ц-наблюдателя в точке с координатами $\{\delta,\gamma\}$.

[6] Обладание этим моментом и служит подтверждением факта непременного участия частицы во вращении.

деленными по направлению (и равными ς по модулю) обе составляющие: $\vec{u}^*$ и $\vec{u}_*$ (рис. 5)[7];

б) испытывающей центростремительное ускорение $\vec{a}_{цс}$ (равное по модулю центробежному).

Тогда, используя для собственно-орбитальной скорости обозначение $\vec{u}_0$ (вместо $\vec{u}_\perp$ и $\vec{u}_ц$), Ц-наблюдатель может написать:

$$\vec{u}_0 = \vec{u}^* + \vec{u}_*; \tag{21, а}$$

$$|\vec{u}^*| = |\vec{u}_*| = \varsigma; \tag{21, б}$$

$$|\vec{u}_0| = \sqrt{2}\varsigma; \tag{21, в}$$

$$\vec{\omega}_0 \times \left(\vec{\omega}_0 \times \vec{R}_0\right) = \vec{\omega}_0 \times \vec{u}_0 = \vec{a}_{цс}, \tag{21, г}$$

где ω_0 и R_0 — значения собственной частоты и радиуса собственной орбиты в глазах Ц-наблюдателя[8]. Разумеется, в таком случае представление вектора $\vec{u}_0$ в виде суммы двух векторов $(\vec{u}^* + \vec{u}_*)$ (образующих углы, равные $\pm\left(\frac{\pi}{4}\right)$ с вектором суммы в любой точке орбиты) может служить лишь единственной цели — ***сохранить информацию*** (скрытую) о неопределенности направления составляющей $\vec{u}_*$. Тогда при необходимости эту информацию можно будет использовать.

Теперь выясним, как представляет себе вращение свободной частицы по собственной орбите наблюдатель, начало координат которого смещено относительно начала координат Ц-наблюдателя, расположенного в центре собственно-орбитального круга (рис. 6). Будем пока считать, что наблюдатели друг относительно друга покоятся.

Как следует из рис. 6, любой наблюдатель обязательно найдет на орбите-окружности точку, в которой — в моменты появления в ней частицы — то X-проекция собственно-орбитальной скорости равна $\sqrt{2}\varsigma$, а Y-проекция равна нулю, то наоборот. Например, в глазах j-го наблюдателя в точке 1

$$u_{0,x}(x_1, y_1, t) = \begin{cases} \sqrt{2}\varsigma \\ 0 \end{cases} \quad \text{с равной вероятностью;}$$

$$u_{0,y}(x_1, y_1, t) = \begin{cases} 0 \\ \sqrt{2}\varsigma \end{cases} \quad \text{с равной вероятностью.}$$

[7] То есть предлагается считать, что во всех точках орбиты вектор $\vec{u}^*$ составляет угол $\frac{\pi}{4}$ с радиус-вектором $\vec{R}_0$, а вектор $\vec{u}_*$ — угол $\frac{3\pi}{4}$.

[8] Вектор $\vec{\omega}_0$ направлен в рассматриваемом — *двумерном* — случае перпендикулярно одной лишь плоскости $\{\delta, \gamma\}$. В реальном — трехмерном — случае этот вектор имеет три составляющие (равные по модулю), из которых только одна точно определена по направлению.

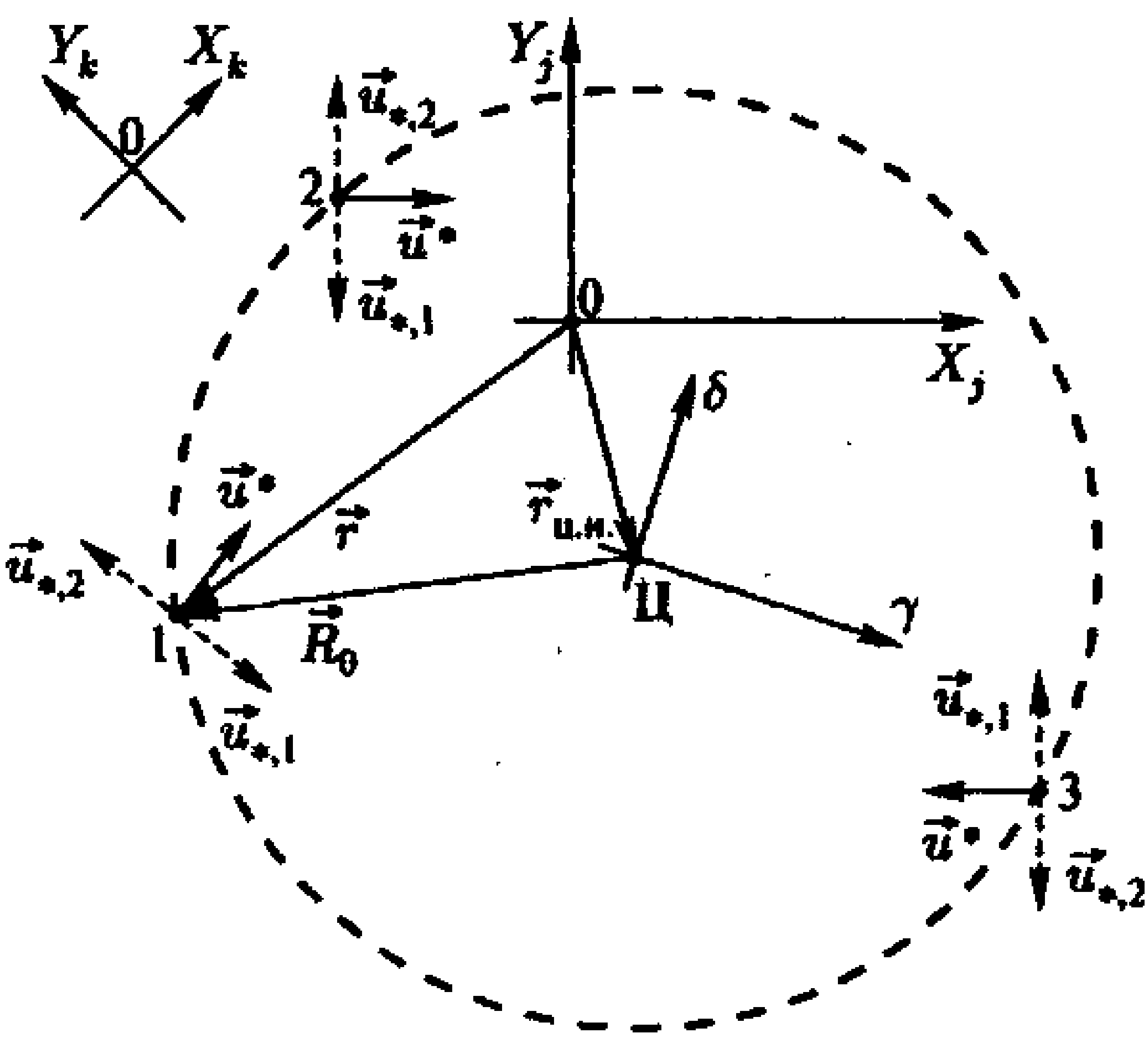

Рис. 6. Вращение точечной свободной частицы в глазах двух наблюдателей.
X_j, Y_j — оси j-го наблюдателя — и X_k, Y_k — оси k-го наблюдателя — расположены в той же плоскости $\{XY\}$, что и δ, γ — оси кординат Ц-наблюдателя. Оси Z_j, Z_k и ξ параллельны друг другу, перпендикулярны плоскости $\{XY\}$ и смотрят на читателя.

В точке 1 составляющая $\vec{u}^*$ собственно-орбитальной скорости представляется j-му наблюдателю выражением

$$\vec{u}^* = \vec{e}_{x_j}\left(\frac{\varsigma}{\sqrt{2}}\right) + \vec{e}_{y_j}\left(\frac{\varsigma}{\sqrt{2}}\right),$$

а составляющая $\vec{u}_*$ выражением

$$\vec{u}_* = \vec{e}_{x_j}\left(\pm\frac{\varsigma}{\sqrt{2}}\right) + \vec{e}_{y_j}\left(\pm\frac{\varsigma}{\sqrt{2}}\right).$$

В результате на каждые два мгновения, что частица появляется в точке 1: в одно из мгновений $u_{0,x_j} = \sqrt{2}\varsigma$, $u_{0,y_j} = 0$; в другое из мгновений $u_{0,x_j} = 0$, $u_{0,y_j} = \sqrt{2}\varsigma$.

В точке 2 в глазах j-го наблюдателя и в точке 1 в глазах k-го наблюдателя: $\vec{u}^* = \vec{e}_x \cdot \varsigma$; $\vec{u}_* = \vec{e}_y \cdot (\pm\varsigma)$. В результате на каждые два мгновения, что частица появляется, например, в точке 2: в одно из мгновений $u_{0,x_j} = \varsigma$, $u_{0,y_j} = \varsigma$; в другое из мгновений $u_{0,x_j} = \varsigma$, $u_{0,y_j} = -\varsigma$.

При этом:

$$[u_0(x_1,y_1,t)]^2 = [u_{0,x}(x_1,y_1,t)]^2 + [u_{0,y}(x_1,y_1,t)]^2 = \begin{Bmatrix} 2\varsigma^2+0 \\ 0+2\varsigma^2 \end{Bmatrix} = 2\varsigma^2; \tag{22}$$

$$\langle u_{0,x}(x_1,y_1)\rangle_{\Delta t} = \frac{\varsigma}{\sqrt{2}}; \tag{23, а}$$

$$\left\langle [u_{0,x}(x_1,y_1)]^2 \right\rangle_{\Delta t} = \left\langle [u_x^*(x_1,y_1) + u_{*,x}(x_1,y_1)]^2 \right\rangle_{\Delta t} =$$
$$= \left\langle [u_x^*(x_1,y_1)]^2 \right\rangle_{\Delta t} + \left\langle [u_{*,x}(x_1,y_1)]^2 \right\rangle_{\Delta t} +$$
$$+ 2\langle u_x^*(x_1,y_1)\cdot u_{*,x}(x_1,y_1)\rangle_{\Delta t} = \frac{\varsigma^2}{2} + \frac{\varsigma^2}{2} + 0 = \varsigma^2\,{}^{9)}; \tag{23, б}$$

$$\langle u_{0,y}(x_1,y_1)\rangle_{\Delta t} = \frac{\varsigma}{\sqrt{2}}; \qquad \left\langle [u_{0,y}(x_1,y_1)]^2 \right\rangle_{\Delta t} = \varsigma^2. \tag{23, в, г}$$

Хотелось бы обратить внимание читателя на то, что в реальном — трехмерном — пространстве найдется точка собственной орбиты (уже сферы) с координатами (x, y, z), в которой

$$\langle u_{0,x}(x,y,z)\rangle_{\Delta t} = \langle u_{0,y}(x,y,z)\rangle_{\Delta t} = \langle u_{0,z}(x,y,z)\rangle_{\Delta t} = \frac{\varsigma}{\sqrt{3}}. \tag{23, д}$$

Таким образом, в упомянутой точке орбиты

$$\langle \vec{u}_0\rangle^2_{\Delta t} = \varsigma^2, \tag{23, е}$$

хотя

$$\left\langle \vec{u}_0^2 \right\rangle_{\Delta t} = 3\varsigma^2. \tag{23, ж}$$

Вернемся, однако, к двумерной обстановке. Разумеется, на орбите-окружности обязательно найдется точка, в которой — в моменты появления в ней частицы — имеют место соотношения, отличные от (23, а–г).

Так, если вести наблюдение из j-системы отсчета за точкой 2 или из k-системы за точкой 1, то по-прежнему справедливы соотношения (22), но, например, в точке 1 в глазах k-наблюдателя

$$u_{0,x}(x_1,y_1,t) = \langle u_{0,x}(x_1,y_1)\rangle_{\Delta t} = \varsigma; \qquad \left\langle [u_{0,x}(x_1,y_1)]^2 \right\rangle_{\Delta t} = \varsigma^2;$$
$$u_{0,y}(x_1,y_1,t) = \pm\varsigma; \quad \langle u_{0,y}(x_1,y_1)\rangle_{\Delta t} = 0;$$
$$\left\langle [u_{0,y}(x_1,y_1)]^2 \right\rangle_{\Delta t} = (\pm\varsigma)^2 = \varsigma^2.$$

9) Поскольку $u_{*,x}(x_1,y_1,t) = \pm\left(\frac{\varsigma}{\sqrt{2}}\right)$, справедливо: $\langle u_x^*(x_1,y_1)\cdot u_{*,x}(x_1,y_1)\rangle_{\Delta t} = 0$.

Следует иметь в виду, что, хотя с точки зрения ***любого*** наблюдателя в ***любой*** точке орбиты $[u_0(x, y, t)]^2 = 2\varsigma^2$, тем не менее, для наблюдения за частицей одна из систем координат или одна из точек орбиты-окружности может оказаться гораздо предпочтительнее другой [10].

Одного из упомянутых выше наблюдателей, находящегося в центре собственно-орбитального круга (Ц-наблюдателя), допустимо называть привилегированным на том основании, что относительно него центр инерции частицы [11] выглядит только покоящимся. Чтобы отличить этого наблюдателя от всех остальных, ***его*** оси координат и были обозначены символами δ, γ, ξ. Оси всех остальных наблюдателей (как неподвижных, так и движущихся прямолинейно и равномерно относительно Ц-наблюдателя) обозначаются символами X_j, Y_j, Z_j и т. п.

7.3. Третья проблема

Согласно традиционному истолкованию частной теории относительности, если абсолютное значение скорости частицы точно равно ς, значит, частица является ***безмассовой, движется прямолинейно и равномерно***, и, стало быть, ***ее мгновенная скорость совпадает со средней по времени***. Тем не менее читатель уже мог убедиться в том, что, какой бы массой ни обладала частица, она не может существовать иначе, как вращаясь по собственной орбите со скоростью, равной $\sqrt{3}\varsigma$.

Можно показать на простом примере, что отсюда последует.

Допустим, что инерциальный наблюдатель следит именно за массивной частицей, перемещающейся вдоль X-оси. Допустим также, что наблюдатель всякий раз видит частицу только в тех точках X-оси, в которых значение X-проекции ***мгновенной*** скорости частицы как раз и равно точно ς. Следует иметь в виду, что, поскольку частица участвует в ***собственном*** вращении, упомянутое значение другим и быть не может. Однако и ***вдоль*** X-оси ***массивная*** частица с такой скоростью перемещаться не может. Значение скорости ее перемещения вдоль X-оси ($V_{\text{частицы}}$) ***обязано совпадать*** со скоростью ее центра инерции ($V_{x,\text{ц.и.}}$) [12], а $V_{x,\text{ц.и.}} = \dfrac{P_x}{m}$, причем ***величина*** $\dfrac{P_x}{m}$ ***может быть любой***

---

[10] Следует принять во внимание, что выбор системы координат для описания физической реальности всегда диктовался исключительно соображениями удобства описания и (или) практической пользы.

[11] Это и есть центр собственно-орбитального круга.

[12] Конечно же, частица ***связана*** со своим центром инерции, который, на самом деле, представляет собой материальное образование и потому может как покоиться, так и двигаться, обладая импульсом (в связи с этим см. Приложение 5).

в пределах $0 \leqslant \dfrac{P_x}{m} < \varsigma$***, но не может быть равной*** ς ***точно.*** Это вполне понятно, ибо скорость, равная $\dfrac{P_x}{m}$, центру инерции была ***попросту приписана*** (исходя, правда, из совершенно очевидных соображений).

Теперь начинает, наконец, вырисовываться проблема: ведь скорость центра инерции частицы ***должна быть функцией скорости самой частицы***, а только что было подчеркнуто, что значение проекции этой скорости в описываемой ситуации ***точно равно*** ς. Следовательно, еще предстоит выяснить, существует ли такое физически содержательное определение скорости центра инерции вращающейся частицы, чтобы значение этой скорости совпало с величиной $\dfrac{P_x}{m}$, пока что просто приписанной центру инерции. Иными словами, предстоит найти вид зависимости величины $V_{x,\text{ц.и.}}$ от величины $V_{x,\text{частицы}}$ $(\equiv u_x)$.

Отождествим себя с наблюдателем, X-ось которого совпадает с осью γ (рис. 7)[13], но который не находится в центре собственно-орбитального круга. Из последнего замечания следует, что скорость непосредственно частицы является для него скоростью результирующей — величиной $\vec{u}$. Легко проверить, что на плоскости $\{X, Y\}$ обязательно найдется точка, в которой — в моменты появления в ней частицы — наблюдатель будет видеть ее обладающей скоростью $\vec{u}$ такой, что:

$$u_x(t) = \varsigma; \tag{24, а}$$

$$u_y(t) = \pm\varsigma; \quad \langle u_y \rangle_{\Delta t} = 0. \tag{24, б}$$

Заметим, что еще в одной точке плоскости $\{X, Y\}$ — в противоположной точке орбиты-окружности — в моменты появления в ней частицы имеют место соотношения

$$u_x(t) = -\varsigma; \tag{25, а}$$

$$u_y(t) = \pm\varsigma; \quad \langle u_y \rangle_{\Delta t} = 0. \tag{25, б}$$

Конечно, ***заведомо*** считая частицу только вращающейся, достаточно вести наблюдение за одной точкой орбиты. Однако если необходимо выяснить, участвует ли частица также и в прямолинейном равномерном движении относительно наблюдателя, нужно следить за ***двумя*** точками орбиты, расположенными на одном диаметре.

Если центр собственно-орбитального круга покоится относительно наблюдателя, последний в любой момент времени найдет две

[13] Это сделано с целью избежать в дальнейшем появления громоздких выражений.

точки плоскости $\{X, Y\}$, в которых имеют место именно соотношения (24), (25) и в которых частица появляется ***одинаково часто***. Если центр собственно-орбитального круга движется относительно наблюдателя вдоль некоторой прямой, то на плоскости $\{X, Y\}$ найдутся уже две ***линии***, в каждой точке которых соотношения (24), (25) также имеют место, но частица в точках разных линий появляется с ***разной частотой***.

Пусть центр орбитального круга (центр инерции точечной частицы) движется вдоль X-оси (рис. 7) прямолинейно и равномерно

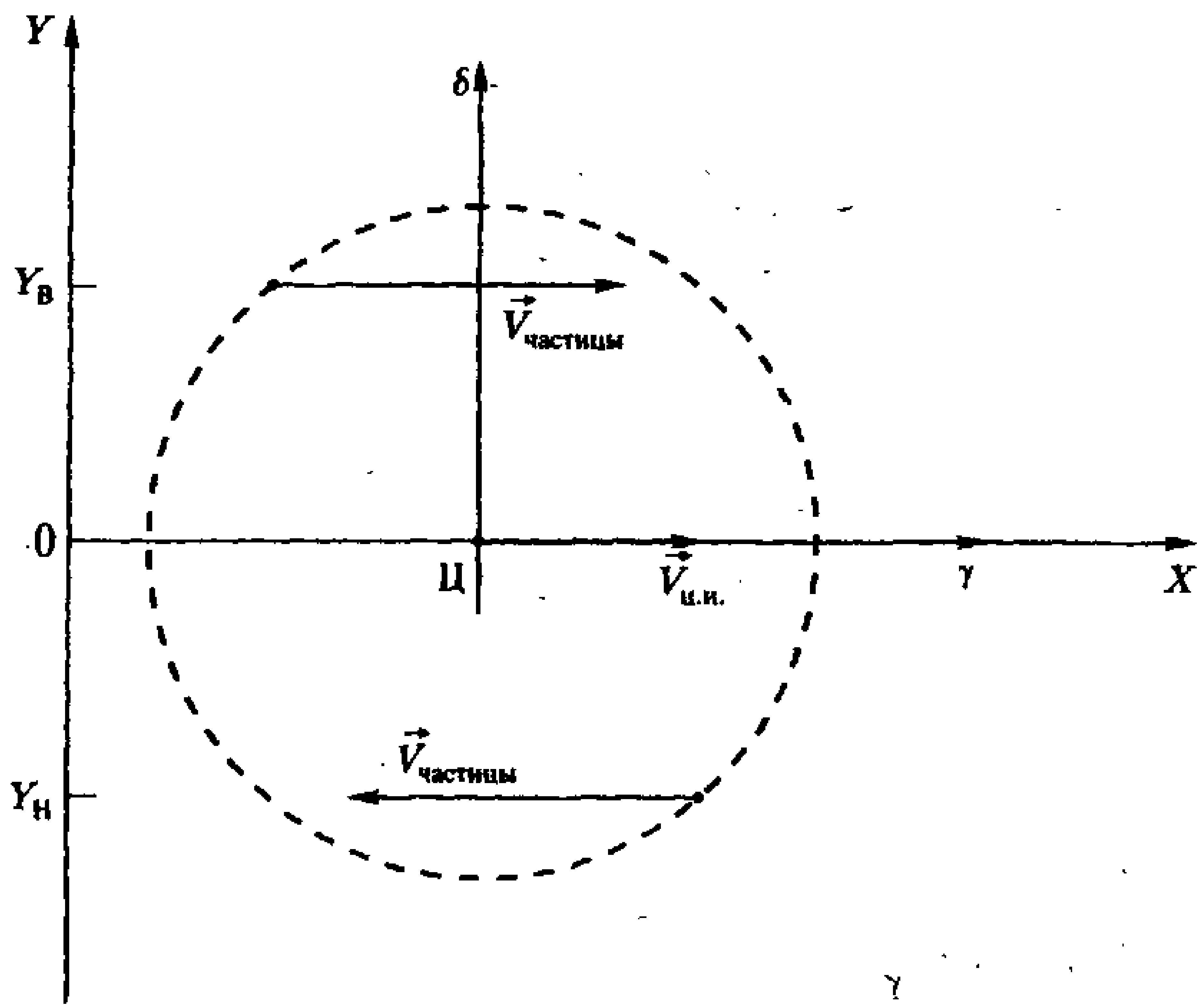

Рис. 7. Прямолинейное и равномерное перемещение собственно-орбитального круга вдоль X-оси

$$\vec{V}_{частицы}\,(Y_в) = \vec{e}_x \cdot u_x(Y_в) = \vec{e}_x \cdot \zeta;$$
$$\vec{V}_{частицы}\,(Y_н) = \vec{e}_x \cdot u_x(Y_н) = \vec{e}_x \cdot (-\zeta).$$

Во всех точках линий $Y = Y_в$ и $Y = Y_н$ модуль X-проекции результирующей скорости (u_x) равен ζ, несмотря на участие частицы еще и в прямолинейном равномерном движении вдоль X-оси со скоростью, равной

$$\vec{V}_{ц.и.} = \vec{V} = \left(\frac{\vec{P}}{m}\right) = \vec{e}_x \cdot \left(\frac{P}{m}\right).$$

со скоростью $V_{\text{ц.и.}}$, равной $V_{\text{ц.и.}} \equiv V = \frac{P}{m}$ $\left(0 < \frac{P}{m} < \varsigma\right)$. При этом значение скорости частицы в точках одной прямой линии равно

$$u_x(Y_{\text{в}}) = \varsigma, \tag{25, в}$$

а в точках другой прямой линии равно

$$u_x(Y_{\text{н}}) = -\varsigma, \tag{25, г}$$

Введем представление об исчезающе коротком, но ***не равном нулю точно***, промежутке времени $\Delta t_{\text{в}}$, в течение которого частица наблюдается внутри исчезающе малого, но ***не равного нулю точно***, пространственного интервала $\Delta l_{\text{в}}$ на верхней прямой линии[14]. Аналогичное представление введем о величинах $\Delta t_{\text{н}}$ и $\Delta l_{\text{н}}$, относящихся к нижней прямой линии.

Если вращающаяся частица еще и продвигается вправо вдоль X-оси, стало быть, наблюдатель чаще видит частицу обладающей скоростью $u_x(Y_{\text{в}})$ (численно равной $+\varsigma$) и реже — обладающей скоростью $u_x(Y_{\text{н}})$ (численно равной $-\varsigma$). Тогда средняя по времени результирующая скорость частицы равна

$$\begin{aligned}\langle u_x\rangle_{\Delta t=(\Delta t_{\text{в}}+\Delta t_{\text{н}})} &= \frac{1}{(\Delta t_{\text{в}}+\Delta t_{\text{н}})}\cdot\left((+\varsigma)\cdot\Delta t_{\text{в}} + (-\varsigma)\cdot\Delta t_{\text{н}}\right) = \\ &= \varsigma\cdot\frac{\Delta t_{\text{в}}-\Delta t_{\text{н}}}{\Delta t_{\text{в}}+\Delta t_{\text{н}}} = \varsigma\cdot\frac{\left(\dfrac{\Delta t_{\text{в}}}{\Delta t_{\text{н}}}-1\right)}{\left(\dfrac{\Delta t_{\text{в}}}{\Delta t_{\text{н}}}+1\right)}.\end{aligned} \tag{26}$$

Остается дать определение дроби $\dfrac{\Delta t_{\text{в}}}{\Delta t_{\text{н}}}$.

Допустим, что в рассматриваемом примере

$$\frac{\Delta t_{\text{в}}}{\Delta t_{\text{н}}} = \frac{1-\left|\dfrac{P_x}{m\cdot u_x}\right|}{1+\left|\dfrac{P_x}{m\cdot u_x}\right|} = \frac{1-\dfrac{|P_x|}{m\cdot\varsigma}}{1+\dfrac{|P_x|}{m\cdot\varsigma}}. \tag{27}$$

(Следует помнить, что не только величины m и $\vec{u}$ являются характеристиками частицы. Импульс $\vec{P}$ — это также, на самом деле, импульс частицы, лишь переадресованный ее центру инерции.)

[14] Нетрудно догадаться, что промежуток времени Δt имитирует *мгновение*, а интервал Δl — *точку*.

Из выражений (27) и (26) следует, что

$$V_{\text{ц.и.}} = \langle u_x \rangle_{\Delta t=(\Delta t_s+\Delta t_n)} = \varsigma \cdot \frac{1-\dfrac{1-\frac{|P_x|}{m\cdot\varsigma}}{1+\frac{|P_x|}{m\cdot\varsigma}}}{1+\dfrac{1-\frac{|P_x|}{m\cdot\varsigma}}{1+\frac{|P_x|}{m\cdot\varsigma}}} = \frac{|P_x|}{m} > 0.$$

В заключение стоит отметить, что, за исключением собственно-орбитальной скорости, *все* характеристики точечной частицы можно переадресовать ее центру инерции, *в том числе и спин* (рис. 8).

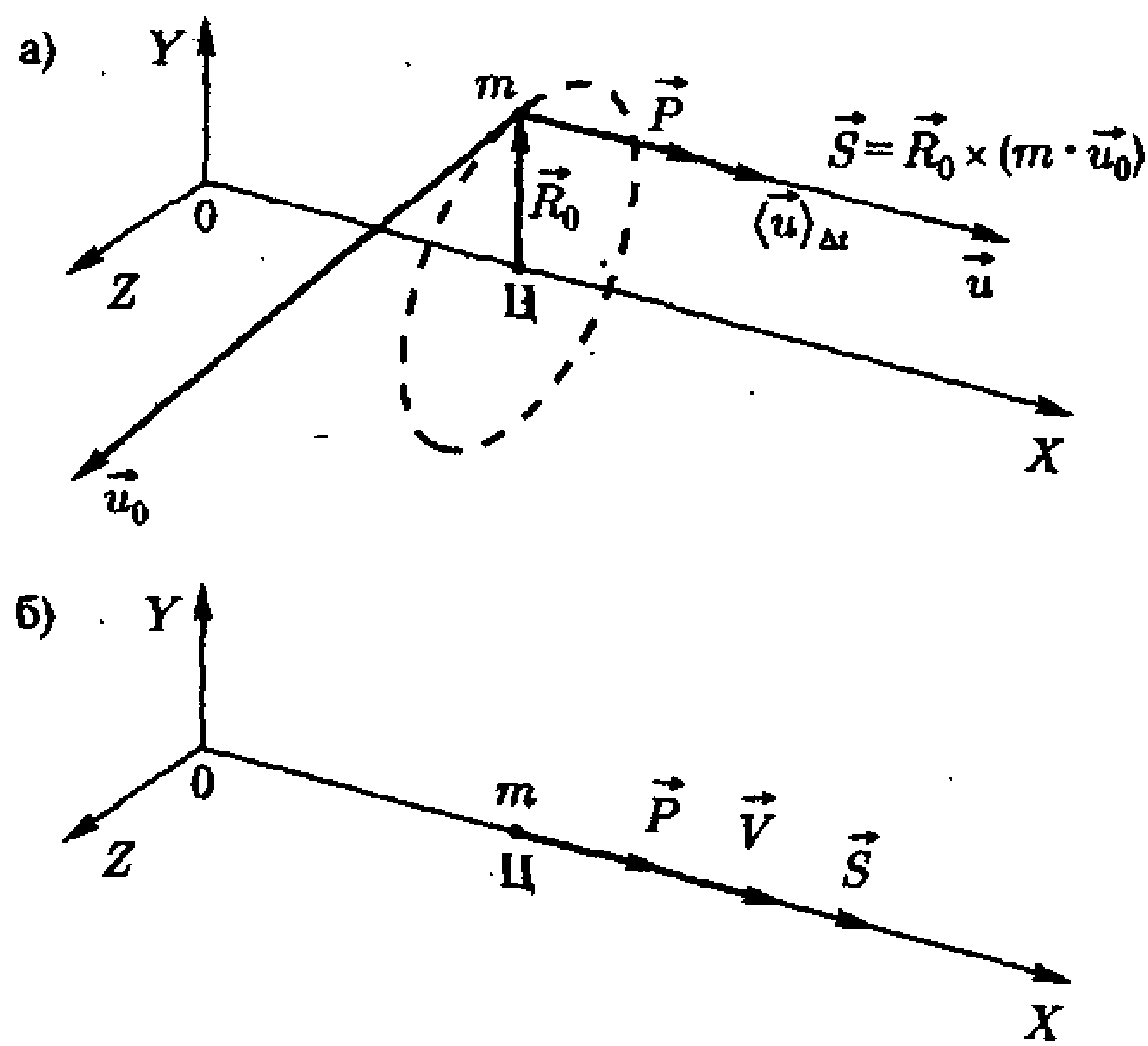

Рис. 8. Представление о точечной частице.

а) Представление, в котором носителем всех своих характеристик является сама частица. При этом $\langle \vec u \rangle_{\Delta t} = \frac{\vec P}{m} = \vec V$.

б) Представление, в котором носителем всех характеристик частицы считается ее центр инерции. В этом представлении обладание спином выглядит действительно крайне загадочным.

Естественно, что именно обладание спином покажется загадочным свойством точечной частицы, если отождествить с нею ее же центр инерции.

7.4. Четвертая проблема

Итак, движение точечной, свободной частицы выглядит следующим образом: прямолинейно и равномерно со скоростью, равной $\frac{\vec{P}}{m(P)}$, движется центр инерции частицы (центр собственно-орбитальной сферы), а сама она вращается вокруг него со скоростью, модуль которой численно равен $\sqrt{3}\varsigma$ [15]. Чтобы выяснить, где тут может скрываться проблема, обратимся к общеизвестным, принадлежащим лоренцевой группе, формулам преобразования проекций скорости, традиционно предполагая, что j-я и k-я инерциальные системы отсчета движутся друг относительно друга вдоль общей X-оси со скоростью V_0.

Для удобства читателя эти формулы приведены еще раз, но в несколько измененном виде:

$$V_{j,x} = \frac{V_{k,x} \cdot \left(1 - \frac{V_0^2}{\varsigma^2}\right) - V_0 \cdot \left(1 - \frac{V_{k,x}^2}{\varsigma^2}\right)}{\left(1 - \frac{V_0^2 \cdot V_{k,x}^2}{\varsigma^4}\right)}; \qquad (28, а)$$

$$V_{j,y} = V_{k,y} \cdot \frac{\left(1 + \frac{V_0 \cdot V_{k,x}}{\varsigma^2}\right)}{\eta \cdot \left(1 - \frac{V_0^2 \cdot V_{k,x}^2}{\varsigma^4}\right)}; \qquad (28, б)$$

$$V_{j,z} = V_{k,z} \cdot \frac{\left(1 + \frac{V_0 \cdot V_{k,x}}{\varsigma^2}\right)}{\eta \cdot \left(1 - \frac{V_0^2 \cdot V_{k,x}^2}{\varsigma^4}\right)}. \qquad (28, в)$$

Имея в виду формулы (28), необходимо принять во внимание следующее:

[15] Подчеркну, что речь идет и будет идти только об описании состояния частицы, а вовсе не об объяснении, почему именно это состояние такое. Объяснение приведено в Приложении 5.

1) Не подлежащим сомнению пока что можно считать лишь то, что по этим формулам следует преобразовывать проекции скорости именно центра инерции точечной частицы, а не ее самой.

2) Формулы эти справедливы при условии

$$0 \leqslant V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 \leqslant \varsigma^2. \tag{29}$$

Теперь легко объяснить, в чем состоит проблема. Если речь идет о результирующей скорости ($\vec{u}$) непосредственно частицы, то

$$u_x^2 = u_y^2 = u_z^2 = \varsigma^2, \tag{30}$$

и, стало быть, условие (29) принципиально невыполнимо[16]. Но, с другой стороны, согласно одному из постулатов частной теории относительности, если хотя бы один инерциальный наблюдатель установит равенство какой-либо проекции скорости значению ς, значит любой другой инерциальный наблюдатель должен установить то же самое.

Чтобы выяснить, так ли обстоит дело со скоростью $\vec{u}$, подставим в формулах (28) ее проекции вместо проекций скорости $\vec{V}$. Положив, согласно условию (30), $u_{k,x}^2 = \varsigma^2$, получим

$$u_{j,x} = u_{k,x}; \tag{31, а}$$

$$u_{j,y} = u_{k,y} \cdot \eta \cdot \left(1 + \frac{u_{k,x} \cdot V_0}{\varsigma^2}\right); \tag{31, б}$$

$$u_{j,z} = u_{k,z} \cdot \eta \cdot \left(1 + \frac{u_{k,x} \cdot V_0}{\varsigma^2}\right). \tag{31, в}$$

Казалось бы, вполне логично считать, что если $u_{k,x}^2 = \varsigma^2$, то и $u_{k,x} = \varsigma$. А, поскольку из формулы (31, а) следует равенство $u_{j,x} = u_{k,x}$, стало быть и $u_{j,x} = \varsigma$, что согласуется с упомянутым выше постулатом теории. Однако в отношении двух других проекций ситуация складывается весьма скверная:

$$\frac{u_{j,y}}{u_{k,y}} = \frac{u_{j,z}}{u_{k,z}} = \sqrt{\frac{\varsigma + V_0}{\varsigma - V_0}} > 1. \tag{32, а}$$

Считая опять-таки, что если $u_{k,y}^2 = \varsigma^2$, $u_{k,z}^2 = \varsigma^2$, то и $u_{k,y} = \varsigma$, $u_{k,z} = \varsigma$, придется, принимая во внимание формулу (32, а), сделать обескураживающий вывод: $u_{j,y} > \varsigma$, $u_{j,z} > \varsigma$. Но это еще не все. Поскольку $u_{k,x}$ — величина знакопеременная, приходится считать, что

[16] Это же относится и к собственно-орбитальной скорости $\vec{u}_0$.

с равной вероятностью

$$u_{j,y} = u_{k,y} \cdot \eta \cdot \left(1 - \frac{V_0}{\varsigma}\right); \quad u_{j,z} = u_{k,z} \cdot \eta \cdot \left(1 - \frac{V_0}{\varsigma}\right),$$

а тогда

$$\frac{u_{j,y}}{u_{k,y}} = \frac{u_{j,z}}{u_{k,z}} = \sqrt{\frac{\varsigma - V_0}{\varsigma + V_0}} < 1, \qquad (32,б)$$

и, следовательно, $u_{j,y} < \varsigma$, $u_{j,z} < \varsigma$.

Очевидно, что, признавая справедливыми формулы (31), придется признать справедливыми и неравенства $\frac{u_{j,y}}{u_{k,y}} \neq 1$; $\frac{u_{j,z}}{u_{k,z}} \neq 1$. Но тогда нет оснований считать, что $\frac{u_{j,y}^2}{u_{k,y}^2} = 1$; $\frac{u_{j,z}^2}{u_{k,z}^2} = 1$, и, стало быть, положив $u_{k,y}^2 = u_{k,z}^2 = \varsigma^2$, мы вынуждены сделать вывод, что $u_{j,y}^2 \neq \varsigma^2$; $u_{j,z}^2 \neq \varsigma^2$. Но это — уже нарушение условий (30), которые, казалось бы, должны иметь место в любой инерциальной системе отсчета.

Совершенно ясно, что условия (30) и формулы (31) несовместимы[17].

Выход из положения состоит в том, чтобы считать условия (30) относящимися к проекциям скорости $\vec{u}$, ***усредненным по достаточно большому промежутку времени*** Δt, а традиционные формулы преобразования — относящимися к ***мгновенным*** значениям проекций этой скорости.

Итак, предлагается признать справедливыми формулы

$$u_{j,x}(t) = u_{k,x}(t); \quad \frac{u_{j,y}(t)}{u_{k,y}(t)} = \frac{u_{j,z}(t)}{u_{k,z}(t)} = \eta \cdot \left(1 + \frac{V_0 \cdot u_{k,x}(t)}{\varsigma^2}\right) \qquad (33)$$

(где $u_x(t) = \pm\varsigma$), но считать, что в глазах любого инерциального наблюдателя

$$\left\langle u_x^2 \right\rangle_{\Delta t} = \left\langle u_y^2 \right\rangle_{\Delta t} = \left\langle u_z^2 \right\rangle_{\Delta t} = \varsigma^2. \qquad (34)$$

---

[17] При этом со скоростью центра инерции все обстоит благополучно. Если $V_{k,x} = \varsigma$, то при этом, во-первых, согласно формуле (28, а), и $V_{j,x} = \varsigma$; во-вторых, согласно соотношениям (29), $V_{k,y} = V_{k,z} = 0$. Тогда и $V_{j,y} = V_{j,z} = 0$, а тем самым $V_j^2 = V_k^2 = \varsigma^2$. Принадлежащая лоренцевой группе формула преобразования **абсолютного** значения скорости центра инерции точечной частицы выглядит следующим образом:

$$V_j = \varsigma \cdot \sqrt{1 - \frac{\left(\varsigma^2 - V_0^2\right)\left(\varsigma^2 - V_k^2\right)}{\left(\varsigma^2 - V_0 \cdot V_{k,x}\right)^2}}.$$

Однако совершенно очевидно, что выражения (34) должны «возникать» из формул (33) (ведь усреднению по времени подлежат величины мгновенные). Поэтому нужно разработать адекватную процедуру усреднения. В этой связи вниманию читателя предлагаются два выражения.

Первое:

$$\vec{u}(t) = \frac{\vec{P}(t)}{m(P)} + \vec{u}_0(t),$$

в котором $\vec{u}(t)$ — результирующая скорость частицы относительно инерциального наблюдателя, $\frac{\vec{P}(t)}{m(P)}$ — скорость центра инерции также относительно инерциального наблюдателя, а $\vec{u}_0(t)$ — собственно-орбитальная скорость частицы (относительно ее центра инерции)[18].

Второе выражение:

$$\langle\vec{u}\rangle_{v_0,\Delta t} = \left\langle \frac{\vec{P}}{m(P)} + \vec{u}_0 \right\rangle_{v_0,\Delta t}.$$

Здесь символ $\langle\ \rangle_{v_0,\Delta t}$ должен свидетельствовать, что соответствующая величина усреднена по некоторому конечному объему v_0 и по достаточно большому промежутку времени Δt. В связи с этим необходимо иметь в виду очень важное обстоятельство. Дело в том, что в глазах Ц-наблюдателя (расположенного в центре собственно-орбитальной сферы) частица выглядит движущейся только по поверхности сферы. Тогда можно «раз и навсегда» выбрать на этой сфере определенную точку (*ее радиус-вектор относительно системы координат, связанной с центром сферы, будет считаться уже неизменным во времени*) и взять среднее по времени всех векторов $\vec{u}_0$, приуроченных именно к этой — одной — точке. В результате получим скорость *локальную*, но усредненную по времени[19]. Именно эта собственно-орбитальная скорость и будет далее обозначаться символом $\langle\vec{u}_0\rangle_{\Delta t}$. Вот уже такую величину можно усреднить еще и по всем точкам поверхности собственно-орбитальной сферы радиуса R_0. Таким образом, объем v_0 равен $v_0 = \frac{4}{3}\pi \cdot R_0^3$.

---

[18] Осведомленному читателю должно быть очевидно, что рассматриваемое выражение противоречит общепринятой релятивистской формуле сложения скоростей. Однако следует иметь в виду, что частица, участвующая в двух движениях, считается *жестко* связанной со своим центром инерции. Она с ним непрерывно взаимодействует (см. Приложение 5).

[19] В связи с этим см. Приложение 1.

Обозначим пока символом $\langle\vec{u}_0\rangle_{v_0,\Delta t}$ собственно-орбитальную скорость частицы относительно Ц-наблюдателя, усредненную не только по достаточно большому промежутку времени, но и по объему v_0. Разумеется, поскольку сумма векторов $\vec{u}_0$ во всех точках собственно-орбитальной сферы точно равна нулю, $\langle\vec{u}_0\rangle_{v_0,\Delta t} \equiv 0$. Поэтому если центр инерции частицы движется (относительно системы отсчета $\{X, Y, Z, t\}$) и, стало быть, обладает импульсом $\vec{P}$, то

$$\langle\vec{u}\rangle_{v_0,\Delta t} = \left\langle \frac{\vec{P}}{m(P)} + \vec{u}_0 \right\rangle_{v_0,\Delta t} = \left\langle \frac{\vec{P}}{m(P)} \right\rangle_{v_0,\Delta t} = \langle \vec{V}(\vec{P})\rangle_{v_0,\Delta t}.$$

Теперь многое зависит от величины v_0. Как будет показано в гл. 8 (см. с. 84), $R_0 = \dfrac{\sqrt{3}\hbar}{2m_0\cdot\varsigma}$, а тогда значение R_0 не превышает $\approx 2\cdot 10^{-11}$ см даже для самого легкого из массивных лептонов (электрона или позитрона). Поэтому, если только не иметь в виду совершенно экзотические ситуации, вполне разумно считать столь малый объем точкой. Тогда, конечно, величину $\vec{P}$ можно считать неизменной в пределах объема v_0, после чего индекс «$_{v_0}$» с величин $\langle\vec{u}\rangle_{v_0,\Delta t}$ и $\langle\vec{P}\rangle_{v_0,\Delta t}$ (*но не с величины* $\langle\vec{u}_0\rangle_{v_0,\Delta t}$) вполне допустимо снять, хотя ***именно эти величины и будут в дальнейшем фигурировать под символами*** $\langle\vec{u}\rangle_{\Delta t}$ ***и*** $\langle\vec{P}\rangle_{\Delta t}$ $\left(\langle\vec{u}\rangle_{\Delta t} \equiv \langle\vec{u}\rangle_{v_0,\Delta t};\ \langle\vec{P}\rangle_{\Delta t} \equiv \langle\vec{P}\rangle_{v_0,\Delta t}\right)$. Что же касается символа $\langle\vec{u}_0\rangle_{\Delta t}$ $\left(\neq \langle\vec{u}_0\rangle_{v_0,\Delta t}\right)$, то он, напомню, означает именно ***локальную*** величину, приуроченную навечно к какой-то определенной точке собственно-орбитальной сферы (если смотреть из центра сферы).

Если в промежутке Δt импульс $\vec{P}$ допустимо считать неизменным[20], то $\langle\vec{u}\rangle_{\Delta t} = \dfrac{\vec{P}}{m(P)} = \vec{V}$. Пояснить это соотношение помогает рис. 9, причем величины τ_1, τ_2 тождественны величинам $\Delta t_в$, $\Delta t_н$ (см. с. 65).

Неравенство $\tau_1 > \tau_2$ символизирует, что частица, участвующая в собственно-орбитальном вращении вокруг своего центра инерции, еще и движется вместе с ним относительно k-го наблюдателя со скоростью, X-проекция которой равна $\dfrac{P_{k,x}}{m}$. Если $\Delta t \gg (\tau_1 + \tau_2)$, нет ничего

[20] Учитывая, что период собственного вращения даже самой легкой из массивных частиц не превышает $\approx 10^{-22}$ *с*, можно считать величину $\approx 10^{-20}$ *с* уже достаточно продолжительным для усреднения промежутком времени. Лишь в крайне экзотической ситуации нельзя пренебречь изменением импульса в течение промежутка времени $\approx 10^{-20}$ *с*. А если можно, то такой промежуток допустимо считать мгновением.

удивительного в том, что

$$\left\langle u_{k,x}\right\rangle_{\Delta t} = \frac{u_{k,x}(t \in \tau_1)\cdot\tau_1 + u_{k,x}(t \in \tau_2)\cdot\tau_2}{\tau_1+\tau_2} = \\ = \frac{\varsigma\cdot\tau_1 + (-\varsigma)\cdot\tau_2}{(\tau_1+\tau_2)} = \frac{\varsigma\cdot(\tau_1-\tau_2)}{(\tau_1+\tau_2)} < \varsigma, \qquad (35,\text{а})$$

хотя, как следует из того же рис. 9,

$$\left\langle u^2_{k,x}\right\rangle_{\Delta t} = \varsigma^2. \qquad (35,\text{б})$$

Теперь можно приступать к разработке процедуры усреднения по времени мгновенных значений проекций скорости $\vec{u}$, имея в виду достижение совместимости тех самых формул преобразования мгновенных значений величин u_x, u_y, u_z, которые были заведомо причислены к лоренцевой группе, с условием, что в глазах любого инерциального наблюдателя

$$\left\langle u^2_{j,x}\right\rangle_{\Delta t} = \left\langle u^2_{k,x}\right\rangle_{\Delta t} = \left\langle u^2_{l,x}\right\rangle_{\Delta t} = \ldots = \varsigma^2; \qquad (36,\text{а})$$

$$\left\langle u^2_{j,y}\right\rangle_{\Delta t} = \left\langle u^2_{k,y}\right\rangle_{\Delta t} = \left\langle u^2_{l,y}\right\rangle_{\Delta t} = \ldots = \varsigma^2; \qquad (36,\text{б})$$

$$\left\langle u^2_{j,z}\right\rangle_{\Delta t} = \left\langle u^2_{k,z}\right\rangle_{\Delta t} = \left\langle u^2_{l,z}\right\rangle_{\Delta t} = \ldots = \varsigma^2. \qquad (36,\text{в})$$

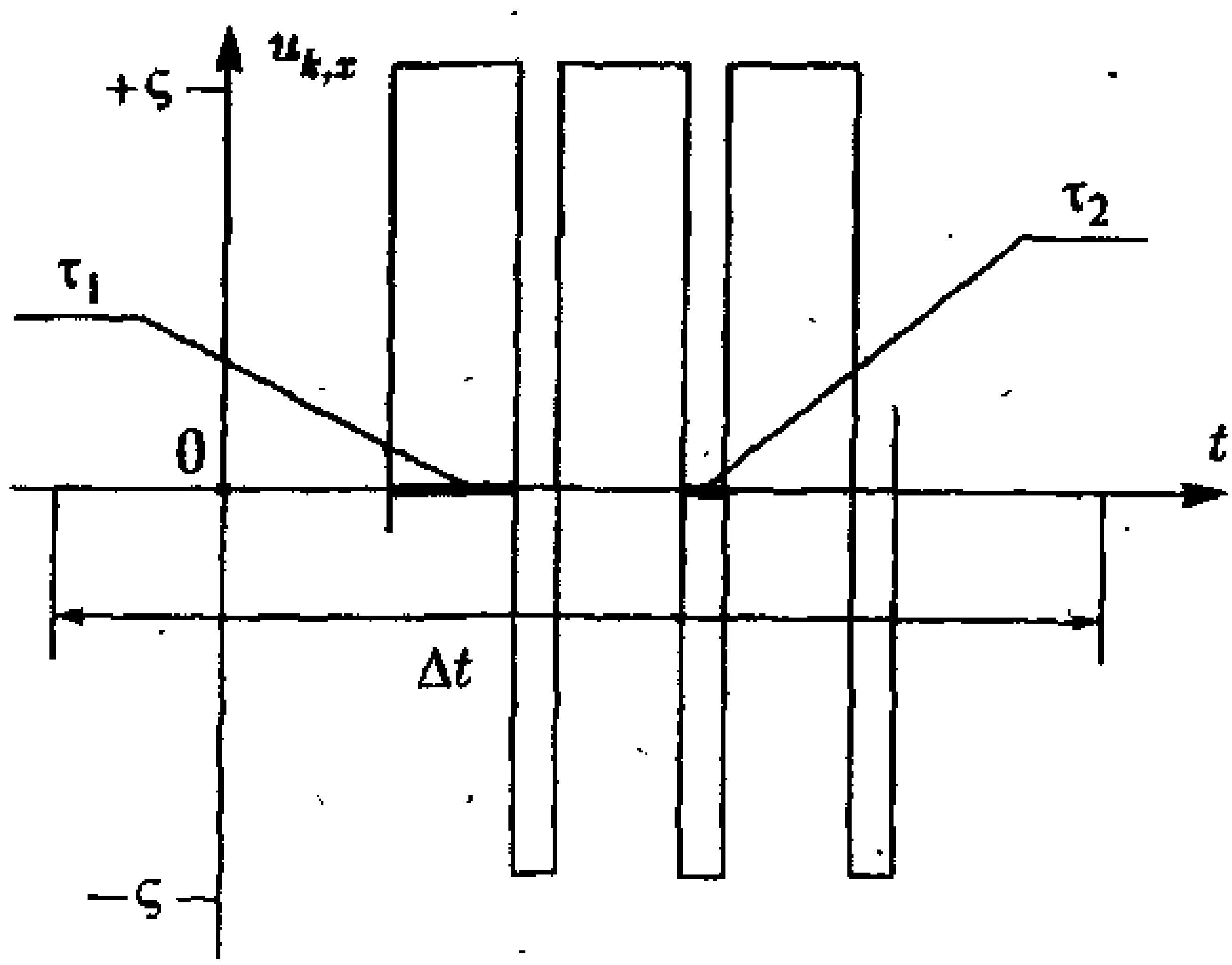

Рис. 9. Колебания X-проекции скорости $\vec{u}$ в глазах k-го наблюдателя.
(На самом деле величины τ_1, τ_2 исчезающе малы. Масштаб рисунка должен передать лишь соотношение между ними.)

Прежде всего, следует еще раз вспомнить, что для описания движения частицы одна определенная инерциальная система отсчета может оказаться гораздо более удобной, чем многие другие[21]. Поэтому, простоты ради, предлагается совместить X-ось k-й инерциальной системы координат с вектором $\vec{P}_k$. Тогда

$$\vec{P}_k = \vec{e}_x \cdot P_{k,x}; \quad \vec{V}_k = \vec{e}_x \cdot V_{k,x}; \quad V_{k,x} = \frac{P_{k,x}}{m\left(P_{k,x}\right)}; \quad V_{k,y} = V_{k,z} = 0.$$

В соответствии с формулой (35, а) и рис. 9

$$\langle u_{k,x}\rangle_{\Delta t} = \frac{\varsigma \cdot \left(\tau_{k,x,1} - \tau_{k,x,2}\right)}{\left(\tau_{k,x,1} + \tau_{k,x,2}\right)} = \varsigma \cdot \frac{1 - \dfrac{\varsigma - V_{k,x}}{\varsigma + V_{k,x}}}{1 + \dfrac{\varsigma - V_{k,x}}{\varsigma + V_{k,x}}} = V_{k,x}\ ^{22)}.$$

Что касается Y- и Z-проекций, то

$$\langle u_{k,y}\rangle_{\Delta t} = \frac{\varsigma \cdot \left(\tau_{k,y,1} - \tau_{k,y,2}\right)}{\left(\tau_{k,y,1} + \tau_{k,y,2}\right)}; \quad \langle u_{k,z}\rangle_{\Delta t} = \frac{\varsigma \cdot \left(\tau_{k,z,1} - \tau_{k,z,2}\right)}{\left(\tau_{k,z,1} + \tau_{k,z,2}\right)}.$$

Поскольку было условлено, что $V_{k,y} = V_{k,z} = 0$ и, следовательно, $\langle u_{k,y}\rangle_{\Delta t} = \langle u_{k,z}\rangle_{\Delta t} = 0$, необходимо считать, что $\tau_{k,y,1} = \tau_{k,y,2}$; $\tau_{k,z,1} = \tau_{k,z,2}$. Тем не менее очевидно, что

$$\left\langle u_{k,y}^2\right\rangle_{\Delta t} = \frac{\varsigma^2 \cdot \left(\tau_{k,y,1} + \tau_{k,y,2}\right)}{\left(\tau_{k,y,1} + \tau_{k,y,2}\right)} = \varsigma^2; \quad \left\langle u_{k,z}^2\right\rangle_{\Delta t} = \frac{\varsigma^2 \cdot \left(\tau_{k,z,1} + \tau_{k,z,2}\right)}{\left(\tau_{k,z,1} + \tau_{k,z,2}\right)} = \varsigma^2.$$

Далее, опять-таки простоты ради, рассмотрим частный случай, когда и j-я инерциальная система движется (относительно k-й) вдоль той же самой X-оси, которую мы уже совместили с вектором $\vec{P}_k$.

Тогда, согласно формулам (31),

$$u_{j,y}(t) = u_{k,y}(t) \cdot \eta \cdot \left(1 + \frac{u_{k,x}(t) \cdot V_0}{\varsigma^2}\right);$$

$$u_{j,z}(t) = u_{k,z}(t) \cdot \eta \cdot \left(1 + \frac{u_{k,x}(t) \cdot V_0}{\varsigma^2}\right).$$

Поскольку $u_{k,x}(t) = \pm\varsigma$, зависимость $u_{j,y}(t)$ (и аналогично $u_{j,z}(t)$) выглядит так, как показано на рис. 10.

---

[21] Хорошо известно, что можно, например, описать движение планет солнечной системы, выбрав декартовы координаты и совместив их начало с центром Земли. Однако в этом случае движение планет (в глазах земного наблюдателя) будет выглядеть невероятно сложным. А все потому, что и сама Земля, и остальные планеты с гораздо большей силой притягиваются к Солнцу, чем друг к другу.

[22] См. с. 66.

Что касается $\tau_{j,y}$-промежутков, то

$$\tau_{j,y} = \eta \cdot \tau_{k,y} \cdot \left(1 + \frac{u_{k,x}(t) \cdot V_0}{\varsigma^2}\right) = \eta \cdot \tau_{k,y} \cdot \begin{cases} 1 - \dfrac{V_0}{\varsigma}; \\ 1 + \dfrac{V_0}{\varsigma}. \end{cases}$$

Поэтому

$$\tau_{j,y,1} = \eta \cdot \tau_{k,y} \cdot \left(1 - \frac{V_0}{\varsigma}\right); \quad \tau_{j,y,2} = \eta \cdot \tau_{k,y} \cdot \left(1 + \frac{V_0}{\varsigma}\right).$$

Тогда:

$$\langle u_{j,y} \rangle_{\Delta t} = \frac{u_{j,y,1} \cdot \tau_{j,y,1} + u_{j,y,2} \cdot \tau_{j,y,2}}{\tau_{j,y,1} + \tau_{j,y,2}} =$$

$$= \frac{|u_{k,y}| \cdot \eta^2 \cdot \left\{ \begin{array}{l} \left(1 + \dfrac{V_0}{\varsigma}\right) \cdot \left[\tau_{k,y} \cdot \left(1 - \dfrac{V_0}{\varsigma}\right)\right] - \\ \qquad - \left(1 - \dfrac{V_0}{\varsigma}\right) \cdot \left[\tau_{k,y} \cdot \left(1 + \dfrac{V_0}{\varsigma}\right)\right] \end{array} \right\}}{\eta \cdot \tau_{k,y} \cdot \left[\left(1 - \dfrac{V_0}{\varsigma}\right) + \left(1 + \dfrac{V_0}{\varsigma}\right)\right]} = 0$$

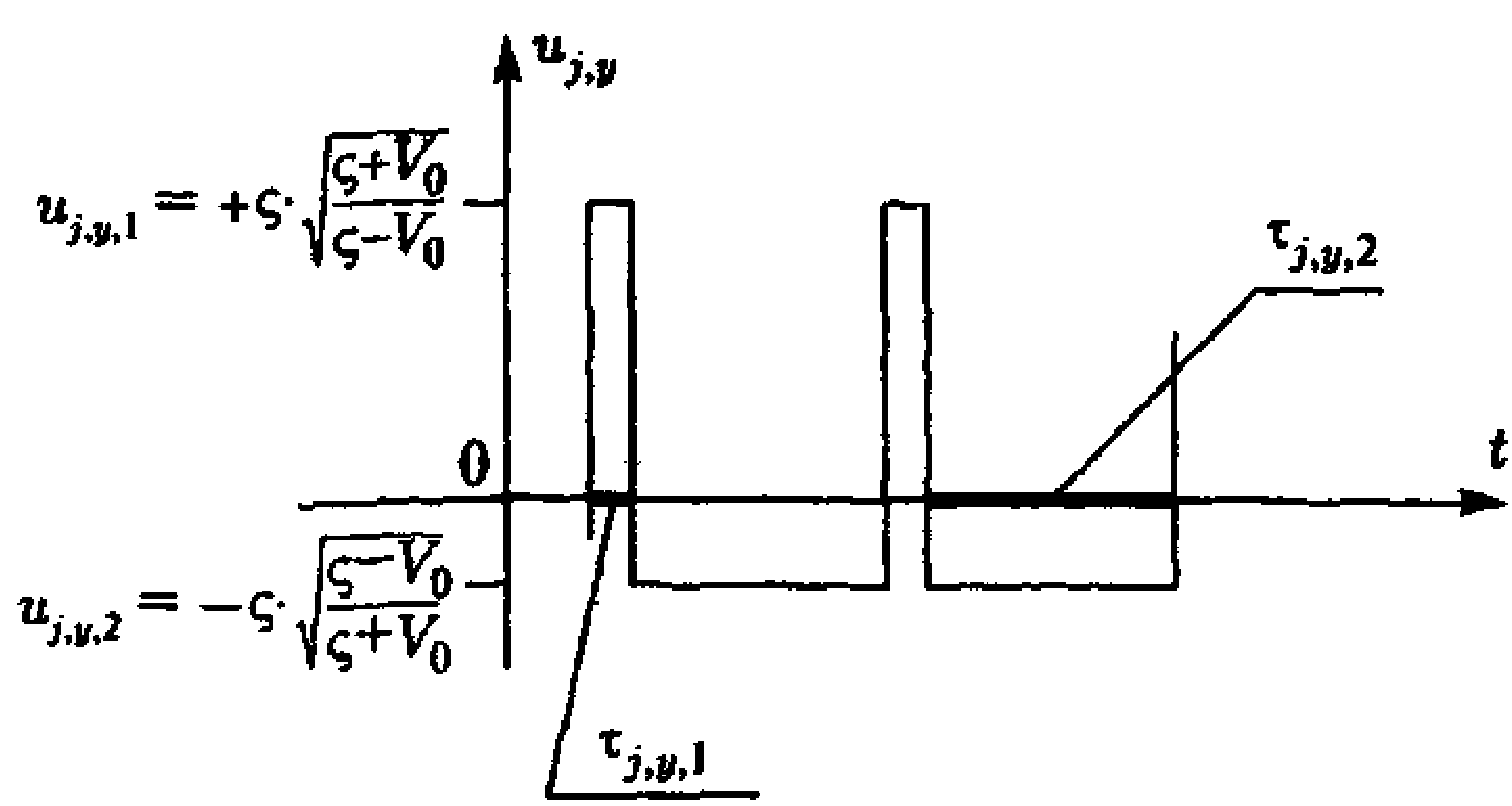

Рис. 10. Колебания во времени Y-проекции результирующей скорости частицы в глазах j-го наблюдателя.

(На самом деле величины $\tau_{j,y,1}, \tau_{j,y,2}$ исчезающе малы. Масштаб рисунка должен передать лишь соотношение между ними.)

(на всякий случай замечу, что $\tau_{k,y,1} = \tau_{k,y,2} \equiv \tau_{k,y}$; $\tau_{k,x,1} = \tau_{k,x,2} \equiv \tau_{k,x}$);

$$\left\langle u_{j,y}^2 \right\rangle_{\Delta t} = \frac{\varsigma^2 \cdot \eta^3 \cdot \left\{ \begin{aligned} &\left(1+\frac{V_0}{\varsigma}\right)^2 \cdot \left[\tau_{k,y} \cdot \left(1-\frac{V_0}{\varsigma}\right)\right] + \\ &\qquad + \left(1-\frac{V_0}{\varsigma}\right)^2 \cdot \left[\tau_{k,y} \cdot \left(1+\frac{V_0}{\varsigma}\right)\right] \end{aligned} \right\}}{\eta \cdot \tau_{k,y} \cdot \left[\left(1-\frac{V_0}{\varsigma}\right) + \left(1+\frac{V_0}{\varsigma}\right)\right]} = \varsigma^2.$$

(Аналогичные выражения — для $\left\langle u_{j,z} \right\rangle_{\Delta t}$ и $\left\langle u_{j,z}^2 \right\rangle_{\Delta t}$.)

Разумеется, нельзя пройти мимо явной необходимости уточнить один из постулатов частной теории относительности. Именно: придется считать, что лишь скорость центра инерции точечной частицы ни на миг не может превысить значения ς. ***Этот запрет не распространяется на результирующую и собственно-орбитальную скорости непосредственно самой частицы.*** Учитывая, однако, что все физические характеристики точечной частицы кроме двух только что упомянутых скоростей оказались заведомо переадресованными ее центру инерции, ни одно из традиционных соотношений, в которых те самые характеристики фигурируют, не потребует изменения своего вида, несмотря на столь неожиданное уточнение традиционного постулата частной теории относительности.

В заключение приводится сводка формул для частного случая, когда $\vec{P}_k = \vec{e}_x \cdot P_{k,x}$; $\vec{V}_0 = \vec{e}_x \cdot V_0$:

$$u_{j,x}(t) = u_{k,x}(t) = \pm\varsigma; \quad u_{j,y}(t) = u_{k,y}(t) \cdot \eta \cdot \left(1 + \frac{u_{k,x}(t) \cdot V_0}{\varsigma^2}\right);$$

$$u_{j,z}(t) = u_{k,z}(t) \cdot \eta \cdot \left(1 + \frac{u_{k,x}(t) \cdot V_0}{\varsigma^2}\right);$$

$$\tau_{k,x,1} = \tau_0 \cdot \left(\frac{\varsigma + V_{k,x}}{\varsigma}\right); \quad \tau_{k,x,2} = \tau_0 \cdot \left(\frac{\varsigma - V_{k,x}}{\varsigma}\right) \quad \text{(см ф-лу (27))};$$

$$\tau_{j,x,1} = \eta \cdot \tau_{k,x,1} \cdot \left(1 - \frac{V_0}{\varsigma}\right); \quad \tau_{j,x,2} = \eta \cdot \tau_{k,x,2} \cdot \left(1 + \frac{V_0}{\varsigma}\right)^{23)};$$

---

23) При этом $\left\langle u_{j,x} \right\rangle_{\Delta t} = \dfrac{\varsigma \cdot (\tau_{j,x,1} - \tau_{j,x,2})}{\tau_{j,x,1} + \tau_{j,x,2}} = \dfrac{V_{k,x} - V_0}{1 - \dfrac{V_{k,x} \cdot V_0}{\varsigma^2}}$, а в соответствии с формулой преобразования X-проекции скорости центра инерции частицы $\dfrac{V_{k,x} - V_0}{1 - \dfrac{V_{k,x} \cdot V_0}{\varsigma^2}} = V_{j,x}$. И, согласно ранее принятому определению, $\left\langle u_{j,x} \right\rangle_{\Delta t} = V_{j,x}$.

$$\tau_{j,y,1} = \eta \cdot \tau_{k,y} \cdot \left(1 - \frac{V_0}{\varsigma}\right); \qquad \tau_{j,y,2} = \eta \cdot \tau_{k,y} \cdot \left(1 + \frac{V_0}{\varsigma}\right);$$

$$\tau_{j,z,1} = \eta \cdot \tau_{k,z} \cdot \left(1 - \frac{V_0}{\varsigma}\right); \qquad \tau_{j,z,2} = \eta \cdot \tau_{k,z} \cdot \left(1 + \frac{V_0}{\varsigma}\right)$$

(следует учесть, что величины $\tau_0, \tau_{k,y}, \tau_{k,z}$ принимаются бесконечно малыми);

$$\left\langle u_{j,z}^2 \right\rangle_{\Delta t} = \left\langle u_{k,z}^2 \right\rangle_{\Delta t} = \varsigma^2; \quad \left\langle u_{j,y}^2 \right\rangle_{\Delta t} = \left\langle u_{k,y}^2 \right\rangle_{\Delta t} = \varsigma^2;$$

$$\left\langle u_{j,x}^2 \right\rangle_{\Delta t} = \left\langle u_{k,x}^2 \right\rangle_{\Delta t} = \varsigma^2; \quad \langle u_{k,x} \rangle_{\Delta t} = \frac{\langle P_{k,x} \rangle_{\Delta t}}{m\left(\langle P_k \rangle_{\Delta t}\right)} = \langle V_{k,x} \rangle_{\Delta t} = V_{k,x}\text{[24]}.$$

7.5. Пятая проблема

Эта проблема заключается в необходимости объяснить, почему же все-таки $E = \sqrt{\varsigma^2 \cdot \vec{P}^2 + m_0^2 \cdot \varsigma^4}$. Ведь уже ясно, что на самом деле вместо произведения $\varsigma^2 \cdot \vec{P}^2$ и величины ς^4 в формуле должны присутствовать произведения типа $\vec{u}^2 \cdot \vec{P}^2$ и $\vec{u}^2 \cdot \vec{u}_0^2$.

Таким образом, предлагается видоизменить знаменитое выражение $E = \sqrt{\varsigma^2 \cdot \vec{P}^2 + m_0^2 \cdot \varsigma^4}$, написав

$$E = \sqrt{\left\langle \left(\vec{u} \cdot \langle \vec{P} \rangle_{\Delta t_0}\right)^2 \right\rangle_{\Delta t} + m_0^2 \cdot \left\langle \left(\vec{u} \cdot \langle \vec{u}_0 \rangle_{\Delta t_0}\right)^2 \right\rangle_{\Delta t}}, \qquad (37)$$

а затем выяснить, как все же получается, что

$$E = \sqrt{\varsigma^2 \cdot \vec{P}^2 + m_0^2 \cdot \varsigma^4}.$$

Прежде всего, я хотел бы предупредить читателя, что надеюсь вскоре убедить его в необходимости ввести в выражение (37) кроме промежутка времени Δt еще и промежуток Δt_0 ($\ll \Delta t$).

Итак, рассмотрим первую скобку в выражении (37). Фигурирующие в ней скорость и импульс измерены относительно инерциального

[24] Можно допустить, что $\Delta t = 10^{-20}$ с и что в течение этого промежутка времени величина $P_{k,x}$ остается практически неизменной. Допустим, однако, что величина $P_{k,x}$ все же очень медленно, но меняется. Тогда можно считать промежуток Δt мгновением на оси времени и написать: $\langle u_{k,x} \rangle_{\Delta t}(t) = \dfrac{P_{k,x}(t)}{m(P_k)} = V_{k,x}(t)$. Вот поэтому и был заранее использован символ $V_{k,x}$ вместо символа $\langle V_{k,x} \rangle_{\Delta t}$.

наблюдателя, ***не находящегося в центре инерции частицы.*** Считая, простоты ради, что импульс не успевает измениться за время Δt ($\gg \Delta t_0$), получаем

$$\left\langle\left(\vec{u}\cdot\langle\vec{P}\rangle_{\Delta t_0}\right)^2\right\rangle_{\Delta t} = \left\langle\left(u_x\cdot P_x + u_y\cdot P_y + u_z\cdot P_z\right)^2\right\rangle_{\Delta t} =$$
$$= \left\langle u_x^2\right\rangle_{\Delta t}\cdot P_x^2 + \left\langle u_y^2\right\rangle_{\Delta t}\cdot P_y^2 + \left\langle u_z^2\right\rangle_{\Delta t}\cdot P_z^2 +$$
$$+ 2P_x\cdot P_y\cdot\left\langle u_x\cdot u_y\right\rangle_{\Delta t} + 2P_x\cdot P_z\cdot\left\langle u_x\cdot u_z\right\rangle_{\Delta t} + 2P_y\cdot P_z\cdot\left\langle u_y\cdot u_z\right\rangle_{\Delta t}.$$

Учитывая знакопеременность проекций скорости (в нашем примере — u_y, u_z), каждое из трех последних слагаемых в правой части этого выражения следует считать равным нулю. А поскольку (как было установлено в § 7.2) $\left\langle u_x^2\right\rangle_{\Delta t} = u_x^2 = \varsigma^2$, $\left\langle u_y^2\right\rangle_{\Delta t} = u_y^2 = \varsigma^2$, $\left\langle u_z^2\right\rangle_{\Delta t} = u_z^2 = \varsigma^2$, окончательный результат выглядит следующим образом:

$$\left\langle\left(\vec{u}\cdot\langle\vec{P}\rangle_{\Delta t_0}\right)^2\right\rangle_{\Delta t} = \varsigma^2\cdot\left(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2\right) = \varsigma^2\cdot P^2.$$

Рассмотрим теперь вторую скобку. Фигурирующая в ней величина $\langle\vec{u}_0\rangle_{\Delta t_0}$ — это скорость непосредственно частицы относительно наблюдателя, ***находящегося в центре инерции частицы и наблюдающего частицу в определенной точке собственной орбиты.*** Выполняя требуемые действия, получаем

$$\left\langle\left(\vec{u}\cdot\langle\vec{u}_0\rangle_{\Delta t_0}\right)^2\right\rangle_{\Delta t} = \left\langle u_x^2\cdot\left\langle u_{0,x}\right\rangle^2_{\Delta t_0}\right\rangle_{\Delta t} + \left\langle u_y^2\cdot\left\langle u_{0,y}\right\rangle^2_{\Delta t_0}\right\rangle_{\Delta t} +$$
$$+ \left\langle u_z^2\cdot\left\langle u_{0,z}\right\rangle^2_{\Delta t_0}\right\rangle_{\Delta t} + 2\left\langle u_x\cdot u_y\cdot\left\langle u_{0,x}\right\rangle_{\Delta t_0}\cdot\left\langle u_{0,y}\right\rangle_{\Delta t_0}\right\rangle_{\Delta t} +$$
$$+2\left\langle u_x\cdot u_z\cdot\left\langle u_{0,x}\right\rangle_{\Delta t_0}\cdot\left\langle u_{0,z}\right\rangle_{\Delta t_0}\right\rangle_{\Delta t} + 2\left\langle u_y\cdot u_z\cdot\left\langle u_{0,y}\right\rangle_{\Delta t_0}\cdot\left\langle u_{0,z}\right\rangle_{\Delta t_0}\right\rangle_{\Delta t}.$$

Как уже было показано в § 7.2, величины u_x^2, u_y^2, u_z^2, $\left\langle u_{0,x}\right\rangle^2_{\Delta t_0}$, $\left\langle u_{0,y}\right\rangle^2_{\Delta t_0}$, $\left\langle u_{0,z}\right\rangle^2_{\Delta t_0}$ не зависят от t в промежутке Δt, причем $u_x^2 = u_y^2 = u_z^2 = \varsigma^2$, $\left\langle u_{0,x}\right\rangle^2_{\Delta t_0} = \left\langle u_{0,y}\right\rangle^2_{\Delta t_0} = \left\langle u_{0,z}\right\rangle^2_{\Delta t_0} = \dfrac{\varsigma^2}{3}$.

Таким образом, $\left\langle u_x^2\cdot\left\langle u_{0,x}\right\rangle^2_{\Delta t_0}\right\rangle_{\Delta t} = \left\langle u_x^2\right\rangle_{\Delta t}\cdot\left\langle u_{0,x}\right\rangle^2_{\Delta t_0} = \dfrac{\varsigma^4}{3}$ и, аналогично, $\left\langle u_y^2\cdot\left\langle u_{0,y}\right\rangle^2_{\Delta t_0}\right\rangle_{\Delta t} = \ldots = \left\langle u_z^2\cdot\left\langle u_{0,z}\right\rangle^2_{\Delta t_0}\right\rangle_{\Delta t} = \ldots = \dfrac{\varsigma^4}{3}$.

Слагаемые вида $\left\langle u_x \cdot u_y \cdot \langle u_{0,x}\rangle_{\Delta t_0} \cdot \langle u_{0,y}\rangle_{\Delta t_0}\right\rangle_{\Delta t}$ равны нулю вследствие знакопеременности величин u_y, u_z, $\langle u_{0,x}\rangle_{\Delta t_0}$, $\langle u_{0,y}\rangle_{\Delta t_0}$, $\langle u_{0,z}\rangle_{\Delta t_0}$[25]. В итоге оказывается, что $\left\langle \left(\vec{u} \cdot \langle\vec{u}_0\rangle_{\Delta t_0}\right)^2\right\rangle_{\Delta t} = \varsigma^4$.

Следует заметить, что, если $\vec{P} = 0$, и, стало быть, результирующая скорость частицы ($\vec{u}$) совпадает с ее собственно-орбитальной ($\vec{u}_0$), все равно:

$$\left\langle u_{0,x}^2 \cdot \langle u_{0,x}\rangle^2_{\Delta t_0}\right\rangle_{\Delta t} = \left\langle u_{0,y}^2 \cdot \langle u_{0,y}\rangle^2_{\Delta t_0}\right\rangle_{\Delta t} = \left\langle u_{0,z}^2 \cdot \langle u_{0,z}\rangle^2_{\Delta t_0}\right\rangle_{\Delta t} = \frac{\varsigma^4}{3}.$$

Теперь необходимо выяснить, как следует преобразовывать величины $\langle u_{0,x}\rangle_{\Delta t_0}$, $\langle u_{0,y}\rangle_{\Delta t_0}$, $\langle u_{0,z}\rangle_{\Delta t_0}$ при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Ради удобства имеет смысл оперировать обезразмеренными скоростями: $\frac{V_0}{\varsigma} \equiv \nu_0$ (при этом $\eta \equiv \left(1 - \nu_0^2\right)^{-1/2}$); $\frac{\vec{u}(t)}{\varsigma} \equiv \vec{\alpha}(t)$; $\frac{\langle\vec{u}_0\rangle_{\Delta t_0}}{\varsigma} \equiv \vec{\mu}$.

По-прежнему считается, что j-я и k-я инерциальные системы отсчета движутся друг относительно друга вдоль общей X-оси со скоростью V_0.

Вид формул преобразования проекций результирующей (мгновенной) скорости (*в новых обозначениях величины* $\vec{\alpha}(t)$) был обоснован в § 7.4:

$$\alpha_{j,x}(t) = \alpha_{k,x}(t);$$
$$\alpha_{j,y}(t) = \eta \cdot \left(1 + \nu_0 \cdot \alpha_{k,x}(t)\right) \cdot \alpha_{k,y}(t);$$
$$\alpha_{j,z}(t) = \eta \cdot \left(1 + \nu_0 \cdot \alpha_{k,x}(t)\right) \cdot \alpha_{k,z}(t).$$

Что же касается величин $\langle u_{0,x}\rangle_{\Delta t_0}$, $\langle u_{0,y}\rangle_{\Delta t_0}$, $\langle u_{0,z}\rangle_{\Delta t_0}$ (*в новых обозначениях величин* $\mu_x(t)$, $\mu_y(t)$, $\mu_z(t)$), то предлагаются следующие формулы преобразования:

$$\mu_{j,x}(t) = \eta \cdot \left(1 + \nu_0 \cdot \alpha_{k,x}(t)\right) \cdot \mu_{k,x}(t); \tag{38, а}$$
$$\mu_{j,y}(t) = \mu_{k,y}(t); \tag{38, б}$$
$$\mu_{j,z}(t) = \mu_{k,z}(t). \tag{38, в}$$

[25] Величина, усредненная на очень маленьком промежутке Δt_0 может осциллировать в гораздо большем по продолжительности промежутке времени Δt.

В этом случае

$$\begin{aligned}
\alpha_{j,x}(t)\cdot\mu_{j,x}(t) &= \eta\cdot\left(1+\nu_0\cdot\alpha_{k,x}(t)\right)\cdot\alpha_{k,x}(t)\cdot\mu_{k,x}(t);\\
\alpha_{j,y}(t)\cdot\mu_{j,y}(t) &= \eta\cdot\left(1+\nu_0\cdot\alpha_{k,x}(t)\right)\cdot\alpha_{k,y}(t)\cdot\mu_{k,y}(t);\\
\alpha_{j,z}(t)\cdot\mu_{j,z}(t) &= \eta\cdot\left(1+\nu_0\cdot\alpha_{k,x}(t)\right)\cdot\alpha_{k,z}(t)\cdot\mu_{k,z}(t).
\end{aligned}\tag{39}$$

Введя очередное обозначение $\vec{\alpha}(t)\cdot\vec{\mu}(t)\equiv\beta(t)$, можно заменить три формулы (39) одной:

$$\beta_j(t) = \eta\cdot\left(1+\nu_0\cdot\alpha_{k,x}(t)\right)\cdot\beta_k(t).\tag{40}$$

Теперь следует принять к сведению, что величина $\left\langle\beta^2\right\rangle_{\Delta t}$ должна быть инвариантом лоренцевой группы формул преобразования. Ведь

$$\left\langle\beta^2\right\rangle_{\Delta t} = \frac{\left\langle\left(\vec{u}\cdot(\vec{u}_0)_{\Delta t_0}\right)^2\right\rangle_{\Delta t}}{\varsigma^4} = 1,$$

а возможно это лишь при условии, что проекции вектора $\vec{\mu}$ преобразуются по формулам (38). Докажем, что это так.

1. $\left\langle\beta^2\right\rangle_{\Delta t} = \left\langle(\vec{\alpha}\cdot\vec{\mu})^2\right\rangle_{\Delta t} = \alpha_x^2\cdot\mu_x^2+\alpha_y^2\cdot\mu_y^2+\alpha_z^2\cdot\mu_z^2$ [26], причем в рассматриваемой ситуации

$$\begin{gathered}
\alpha_{j,x}^2=\alpha_{k,x}^2=1;\quad \alpha_{j,y}^2=\alpha_{k,y}^2=1;\quad \alpha_{j,z}^2=\alpha_{k,z}^2=1;\\
\mu_{j,y}^2=\mu_{k,y}^2=\frac{1}{3};\quad \mu_{j,z}^2=\mu_{k,z}^2=\frac{1}{3};\quad \mu_{k,x}^2=\frac{1}{3}.
\end{gathered}$$

Однако мы еще не располагаем значением $\mu_{j,x}^2$ (ситуация аналогична той, что имела место в § 7.4 в отношении Y- и Z-проекций скорости $\vec{u}$).

2. С учетом только что выписанных равенств

$$\left\langle\beta_k^2\right\rangle_{\Delta t}=1;\quad \left\langle\beta_j^2\right\rangle_{\Delta t}=1\cdot\mu_{j,x}^2+1\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}.$$

3. Чтобы вычислить $\mu_{j,x}^2$, нужно обратиться к первой из формул (38). Кроме того следует учесть, что периоды обращения частицы по собственной орбите преобразуются следующим образом: $\tau_{j,0,1}=\eta\cdot\tau_{k,0}\cdot(1-\nu_0)$; $\tau_{j,0,2}=\eta\cdot\tau_{k,0}\cdot(1+\nu_0)$.

[26] $\left\langle\alpha_x^2\right\rangle_{\Delta t}=\alpha_x^2$ и т. п.

Действуя так же, как в § 7.4, находим, что

$$\mu_{j,x}^2 = \frac{\mu_{j,x,1}^2 \cdot \tau_{j,0,1} + \mu_{j,x,2}^2 \cdot \tau_{j,0,2}}{\tau_{j,0,1} + \tau_{j,0,2}} =$$

$$= \frac{\left\{ \begin{array}{l} \left[\mu_{k,x}^2 \cdot \eta^2 \cdot (1+\nu_0)^2\right] \cdot \left[\tau_{k,0} \cdot (1-\nu_0)\right] + \\ \qquad + \left[\mu_{k,x}^2 \cdot \eta^2 \cdot (1-\nu_0)^2\right] \cdot \left[\tau_{k,0} \cdot (1+\nu_0)\right] \end{array} \right\}}{\left[\tau_{k,0} \cdot (1-\nu_0)\right] + \left[\tau_{k,0} \cdot (1+\nu_0)\right]} = \mu_{k,x}^2.$$

4. Таким образом, $\mu_{j,x}^2 = \mu_{k,x}^2 = \dfrac{1}{3}$, и в итоге $\left\langle \beta_j^2 \right\rangle_{\Delta t} = 1$.

В заключение стоит обратить внимание на одно важное обстоятельство. Принять формулы (38) — все равно, что признать зависимость величины $\langle \vec{u}_0 \rangle_{\Delta t_0}$ ($\equiv \vec{\mu} \cdot \varsigma$) от времени. Однако, поскольку величину, усредненную по времени именно в промежутке Δt, абсурдно считать зависящей от времени в этом промежутке, остается один выход — ввести еще и промежуток (Δt_0) времени усреднения одной только скорости $\vec{u}_0$, после чего принять неравенство $\Delta t \gg \Delta t_0$. Вот зачем потребовалось ввести в соотношение (37) с самого начала еще и символ $\langle\ \rangle_{\Delta t_0}$. Теперь можно допустить, что величины $\left\langle u_{0,x} \right\rangle_{\Delta t_0}$, $\left\langle u_{0,y} \right\rangle_{\Delta t_0}$, $\left\langle u_{0,z} \right\rangle_{\Delta t_0}$ зависят от t в промежутке Δt. При этом вполне разумно полагать, что

$$\left\langle \left(\left\langle u_{0,x} \right\rangle_{\Delta t_0} \right) \right\rangle_{\Delta t} = \left\langle \left(\left\langle u_{0,y} \right\rangle_{\Delta t_0} \right) \right\rangle_{\Delta t} = \left\langle \left(\left\langle u_{0,z} \right\rangle_{\Delta t_0} \right) \right\rangle_{\Delta t} = 0,$$

поскольку именно такие равенства можно считать отражающими жесткую («в среднем по времени») связь частицы со своим центром инерции[27].

Итак, статистический способ описания состояния свободной точечной частицы приводит к необходимости признать обоснованным модифицированное соотношение Эйнштейна (37). Тем не менее, во всех сегодняшних ситуациях оно сводится к обычному, хорошо известному соотношению $E = \sqrt{\varsigma^2 \cdot \vec{P} + m_0^2 \cdot \varsigma^4}$.

[27] Создается обоснованное впечатление, что если сотношение, выражающее закон природы, не содержит время, то соотношение в таком виде возникает в результате усреднения каких-то величин по времени.

Глава 8

Пропущенный инвариант

Хорошо известно, что абсолютное значение проекции спина на какую-либо из осей координат равно $\frac{\hbar}{2}$ (модуль спина равен $\frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$) и следовательно должно быть инвариантом лоренцевой группы формул преобразования. Сопоставим сказанное с определением спина, которое было установлено в § 7.1 и из которого следует, что абсолютное значение, например, Z-проекции спина должно быть равно $|S_z| = R_{0,x} \cdot m \cdot u_{0,y} = \varsigma \cdot R_{0,x} \cdot m$, где $R_{0,x}$ — значение проекции радиус-вектора точки собственно-орбитальной сферы на X-ось, а $u_{0,y}$ $(= \varsigma)$ — значение проекции собственно-орбитальной скорости на Y-ось.

Таким образом, предстоит доказать, что произведение $m \cdot R_{0,x}$ является одним из инвариантов лоренцевой группы.

Среди формул преобразования, принадлежащих вышеупомянутой группе, есть две, относящиеся к частоте (ω) и волновому вектору $(\vec{k})$ колебаний (какой-либо величины), сферическая волна которых распространяется в континууме:

$$\omega_f = \eta \cdot \left(\omega_d - V_0 \cdot k_{d,x}\right); \tag{41}$$

$$k_{f,x} = \eta \cdot \left(k_{d,x} - \frac{V_0}{\varsigma^2} \cdot \omega_d\right). \tag{42}$$

(Здесь V_0 — относительная скорость движения f- и d-инерциальных наблюдателей вдоль общей X-оси.)

Еще одна формула связывает скорости волнового фронта в обеих инерциальных системах отсчета:

$$V_{f,x} = \frac{\varsigma^2 \cdot \left(V_{d,x} - V_0\right)}{\varsigma^2 - V_{d,x} \cdot V_0}\,[1]. \tag{43}$$

Займемся теперь поисками инвариантов.

Образовав конструкцию $\left\{\frac{\omega_f}{k_{f,x}}\right\}$ и затем исключив параметр V_0 с помощью выражения (43), придем к соотношению

$$\frac{\varsigma \cdot \left(\omega_f - k_{f,x} \cdot V_f\right)}{\omega_f V_f - \varsigma^2 \cdot k_{f,x}} = \frac{\varsigma \cdot \left(\omega_d - k_{d,x} \cdot V_{d,x}\right)}{\omega_d V_{d,x} - \varsigma^2 \cdot k_{d,x}} = \mathrm{Inv}. \tag{44}$$

---

[1] Далее понадобятся только X-проекции скорости и волнового вектора. Поэтому формулы преобразования других проекций этих величин не приводятся.

Если будет установлено (экспериментальным, конечно, путем), что Inv = 0, значит, для этой разновидности материальных объектов имеет место соотношение $\omega = V_x \cdot k_x$, где $V_x < \varsigma$.

Если же окажется, что Inv = 1, значит, для этой разновидности материальных объектов

$$\omega = \varsigma \cdot k_x. \tag{45}$$

Пусть имеет место зависимость (45), и тогда формула (41) принимает вид

$$\omega_f = \eta \cdot \omega_d \cdot \left(1 - \frac{V_0}{\varsigma}\right). \tag{46}$$

Эта формула потребуется в дальнейшем.

Теперь следует обратить внимание на одно важное обстоятельство.

Принадлежащие лоренцевой группе формулы преобразования полной кинетической энергии и, автоматически, массы движения точечной частицы выписаны на с. 37 в предположении, что частица всегда присутствует в той же точке пространства, что и центр инерции частицы. Однако, хотя последний — в глазах различных инерциальных наблюдателей — может обладать различной скоростью в пределах от нуля до значения ς, сама частица обладает скоростью, ***абсолютное значение которой всегда и везде точно равно $\sqrt{3}\varsigma$. Поэтому формулы преобразования полной кинетической энергии и массы движения частицы, отнесенных к тем точкам пространства, в которых появляется непосредственно сама частица, выглядят иначе:***

$$E_f = \eta \cdot E_d \cdot \left(1 - \frac{V_0}{\varsigma}\right); \tag{47}$$

$$m_f = \eta \cdot m_d \cdot \left(1 - \frac{V_0}{\varsigma}\right). \tag{48}$$

К этим формулам нужно добавить еще и формулу преобразования частоты вращения частицы:

$$\omega_f = \eta \cdot \omega_d \cdot \left(1 - \frac{V_0}{\varsigma}\right). \tag{49}$$

Кроме того, поскольку частота вращения частицы по собственной орбите («собственная частота») и абсолютное значение X-проекции радиус-вектора точки собственной орбиты частицы связаны соотношением $\omega \cdot R_{0,x} = \varsigma$, формула преобразования величины $R_{0,x}$ выглядит следующим образом:

$$R_{0,x,f} = \frac{R_{0,x,d}}{\eta \cdot \left(1 - \dfrac{V_0}{\varsigma}\right)}. \tag{50}$$

Теперь займемся поисками инвариантов.

Образовав конструкцию $\left\{\frac{E}{\omega}\right\}$, приходим к соотношению

$$\frac{E_f}{\omega_f} = \frac{E_d}{\omega_d} = \mathrm{Inv}\,.$$

Таким образом, прямая пропорциональность друг другу полной кинетической энергии точечной частицы и частоты вращения ее по собственной орбите могла быть установлена еще в 1905 году[2]. Что же касается численного значения коэффициента пропорциональности, то в 1905 году, конечно, не могло быть речи о его экспериментальном (а только такое и возможно) установлении[3].

Однако представляется историческим курьезом, что соотношение $\frac{E}{\omega} = \frac{\hbar}{2}$ впервые было установлено лишь в 1995 году, причем в ходе расчета, проводившегося ***специально*** с целью вычислить значения частоты вращения частицы по ***собственной*** орбите и ***радиуса этой*** орбиты[4]. Поскольку то был расчет в рамках квантовой механики, постоянная Планка $\hbar$, разумеется, являлась величиной постулированной, но множитель $\frac{1}{2}$ в соотношении $\frac{E}{\omega} = \frac{\hbar}{2}$ был получен в ходе расчета.

В связи с этими замечаниями читателю стоит обратить внимание на два обстоятельства.

1. Когда в 1900 году М. Планк ***постулировал*** соотношение $E = \hbar\cdot\omega$, он имел в виду энергию и частоту колебаний ***электромагнитного поля — континуального*** объекта.

2. Когда в 1923 году де-Бройль постулировал соотношение $\omega = \frac{m\cdot c^2}{\hbar}$ уже для частицы[5], он считал ее *«средоточием некоего внутреннего периодического явления»*, одной из характеристик которого

---

[2] Могла, если бы тогда же возникло и предположение об обязательности участия точечной частицы во вращении по собственной орбите.

[3] Технических возможностей для подобных экспериментов тогда еще не было.

[4] Впервые это было сделано автором в его книге «Логическая структура квантовой механики», М., МИЭМ, 1996 (п. 4.5). Детали расчета приведены также в другой книге автора: «Еще раз о спине точечной частицы, формуле Эйнштейна и релятивистском уравнении Дирака», М.: УРСС, 2000.

[5] Частицей, которая в то время служила объектом исследований, был электрон, и его уже тогда склонны были считать точечным. Обратите внимание на то, что в соотношении де-Бройля множитель $\frac{1}{2}$ отсутствует.

является частота колебаний (правда, неведомо какой величины). Не говоря о том, что, как впоследствии оказалось, в формуле де-Бройля фигурирует частота колебаний «волновой функции состояния» (которая является существенно квантовым понятием), сопровождающий текст (курсив в кавычках) представляет собой просто набор слов, разумеется, ничуть не обосновывающий происхождение формулы[6].

Теперь рассмотрим конструкцию $\{m \cdot R_{0,x}\}$. Используя формулы (48) и (50), приходим к соотношению

$$m_f \cdot R_{0,x,f} = m_d \cdot R_{0,x,d} = \mathrm{Inv}\,. \tag{51}$$

Конечно, сегодня нельзя поразить воображение, намекнув, что из экспериментов выяснилось бы, что $\mathrm{Inv} = \dfrac{\hbar}{2\varsigma}$, и, таким образом, соотношение

$$m \cdot R_{0,x} = \frac{\hbar}{2\varsigma} \tag{52}$$

(в котором m — масса движения точечной частицы, а $R_{0,x}$ — абсолютное значение X-проекции радиус-вектора точки собственной орбиты) следовало бы считать выражающим закон природы.

Умножив обе части соотношения (52) на абсолютное значение Y-проекции собственно-орбитальной скорости (величину ς), получаем абсолютное значение Z-проекции спина:

$$S_z = \mathcal{P}_{0,y} \cdot R_{0,x} = (m \cdot \varsigma) \cdot R_{0,x} = \mathrm{Inv} = \frac{\hbar}{2}\,^{7)}. \tag{53}$$

(В этой формуле величина $\mathcal{P}_{0,y}$ ($= m \cdot \varsigma$) представляет собой абсолютное значение Y-проекции собственно-орбитального импульса.)

Из соотношений (51) и (52), которые необходимо считать выражающими законы природы, следует, что радиус собственной орбиты точечной частицы (в системе отсчета, в которой импульс ее центра инерции равен нулю) отличен от нуля. Это обстоятельство с учетом того, что частица обладает отличной от нуля орбитальной скоростью, придает понятию орбиты физическую содержательность.

Итак, читатель мог убедиться в том, что доквантовая (или неквантовая) релятивистская механика объясняет спин точечной частицы.

---

[6] В дальнейшем де-Бройль выразился гораздо определеннее: «с движущимся (прямолинейно и равномерно) телом связана фиктивная волна».

[7] Уже с середины 20-х годов XX столетия известно, что точечная частица обладает спином, абсолютное значение которого к тому же равно $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\hbar$.

Строго говоря, в рамках этой механики формулу (53) следует представить в виде

$$S_z = (m \cdot \varsigma) \cdot R_{0,z} = \varsigma \cdot \text{const}\ [\text{эВ} \cdot \text{с}]\,.$$

Установить численное значение константы можно только экспериментальным путем. И, если бы соотношение (13) было интерпретировано физически содержательным образом в 1905 году (а после интерпретации в принципе уже можно было начать обсуждать эксперименты с целью измерить значение спина), не приходится сомневаться в том, что константой оказалась бы величина $\frac{\hbar}{2\varsigma}$, содержащая постоянную Планка, введенную в физику пятью годами раньше.

В связи с этим хотелось бы привлечь внимание читателя к стойкому убеждению, согласно которому не только вычислить значение спина, но и объяснить его физическую сущность принципиально возможно только в рамках квантового релятивистского уравнения состояния точечной частицы. На самом же деле традиционный метод анализа этого уравнения приводит лишь к выводу о ***необходимости постулировать*** спин[8]. Это безусловно важный вывод, но, разумеется, ни о каком выявлении физической природы спина даже и речи никогда не заходило. Что же касается вычисления значения спина, то не стоит забывать, что вся квантовая механика ***постулирует*** необходимость ввести в основные уравнения и соотношения некую константу. Эта константа и есть постоянная Планка $\hbar$.

Далее, «чисто квантовую природу спина» обычно доказывают с помощью так называемого предельного перехода, согласно которому, *«квантовая механика переходит в классическую (доквантовую) при условии, что $\hbar \to 0$»*. Приняв, что $S_z = \frac{\hbar}{2}$, затем пишут $\lim\limits_{\hbar \to 0} S_z = 0$.

Подобное доказательство основано на неистребимой вере в принципиальную «ненаглядность» квантовой механики[9]. На самом же деле

---

[8] Доказательство того, что именно так оно и есть, содержится в книгах автора: «Логическая структура квантовой механики», М., МИЭМ, 1996 (п. 4.5); «Еще раз о спине точечной частицы, формуле Эйнштейна и релятивистском уравнении Дирака», М.: УРСС, 2000.

[9] Такая вера слишком часто служит оправданием для отказа от интерпретации математических соотношений между физическими величинами. В связи с этим замечанием мне показалось уместным привести цитату из книги К. Ланцоша «А. Эйнштейн и строение космоса» (М.: Наука, 1967. С. 119):

«"Все, что нужно делать — это описывать наблюдаемые явления", — таков был лозунг позитивистской философии типа философии Маха—Пуанкаре... Нечего спрашивать о возможности "понимания", потому что такой вещи просто не существует. Есть только "описание"».

$S_z = (m \cdot \varsigma) \cdot R_{0,x}$, где круглая скобка представляет собой модуль Y-проекции собственно-орбитального импульса точечной частицы.

Свободный от традиционных ошибок квантово-механический расчет позволяет по ***отдельности*** рассчитать значение проекции радиус-вектора точки собственной орбиты (которое, конечно же, оказывается равным $\frac{\hbar}{2m \cdot \varsigma}$) и значение проекции собственно-орбитального импульса (которое оказывается не зависящим от $\hbar$ и равным $m \cdot \varsigma$).

Конечно, выражение $\lim\limits_{\hbar \to 0} S_z = \mathscr{P}_{0,y} \cdot \lim\limits_{\hbar \to 0} R_{0,x} = \mathscr{P}_{0,y} \cdot \lim\limits_{\hbar \to 0} \left(\frac{\hbar}{2m \cdot \varsigma} \right) = 0$ остается совершенно справедливым и после всего сказанного, так что спин, разумеется, исчезает при $\hbar \to 0$. Причина, однако, вполне прозаическая: значение механического момента, равное произведению орбитального импульса на радиус орбиты, автоматически обратится в нуль, если потребовать, чтобы один из сомножителей обращался в нуль, а другой оставался отличным от нуля и ограниченным сверху.

В механике, однако, принято считать физически бессодержательным представление об орбите ***исчезающе малого*** радиуса (а, тем самым, и о механическом моменте), если вращающейся частице приписывается ***ограниченное сверху*** значение орбитального импульса.

Показательно, что произведение $(\mathscr{P}_{0,y} \cdot R_{0,x})$ (то есть значение Z-проекции спина) лишь потому остается равным $\frac{\hbar}{2}$ при условии $R_{0,x} \to 0$, что при этом $\mathscr{P}_{0,y} \to \infty$. Именно:

$$\lim_{P \to \infty} R_{0,x}(P) = \lim_{P \to \infty} \frac{\hbar}{2m(P) \cdot \varsigma} = \frac{\hbar}{2m_0 \cdot \varsigma} \cdot \lim_{P \to \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{P}{m_0 \cdot \varsigma} \right)^2}} = 0,$$

$$\lim_{P \to \infty} \mathscr{P}_{0,y}(P) = \varsigma \cdot \lim_{P \to \infty} m(P) = m_0 \cdot \varsigma \cdot \lim_{P \to \infty} \sqrt{1 + \left(\frac{P}{m_0 \cdot \varsigma} \right)^2} = \infty.$$

Мне лично кажется, что позитивистская философия здесь не причем. Еще Галилей и Ньютон принципиально отвергали необходимость того, что они считали объяснением физического явления (и это свидетельствует, что они прекрасно понимали разницу между описанием и объяснением). Но я думаю, что они попросту не считали нужным лично заниматься поисками объяснений. Вряд ли они стали бы препятствовать заниматься этим другим исследователям. Конечно, описание явления есть совершенно необходимый этап: только после описания, использующего **адекватные** понятия, имеет смысл переходить к объяснению. Сегодня, по-видимому, уже все согласны и с необходимостью объяснения, но... все упирается в то, что именно считать объяснением.

Как видим, только если импульс центра инерции точечной частицы ***бесконечно велик***, радиус собственной орбиты частицы оказывается ***исчезающе малым***. Тогда, кстати, и становится оправданным впечатление, что материальная точка вращается вокруг оси, проходящей через саму эту точку.

Глава 9

Теория относительности и спин точечной частицы

Пора подвести некоторые итоги.

Исследование знаменитого эйнштейновского соотношения между энергией, импульсом и массой покоя свободной точечной частицы привело к следующим выводам.

1. Точечная частица, к какой бы разновидности она ни принадлежала (какой бы массой она ни обладала), не может существовать иначе, как вращаясь по собственной орбите конечного ненулевого радиуса.

2. Центр собственной орбиты выполняет функции центра инерции точечной частицы, и ему могут быть переадресованы все характеристики частицы, включая спин, но исключая, естественно, мгновенную результирующую и собственно-орбитальную скорости.

3. Собственно-орбитальную скорость частицы необходимо признать самостоятельным (неопределяемым) понятием и приписать ее абсолютному значению величину в корень из трех раз большую, чем скорость света в пустом пространстве. Абсолютное значение каждой из проекций собственно-орбитальной скорости на оси координат при этом точно равно численному значению скорости света.

4. Если описывать вращение точечной частицы по поверхности собственно-орбитальной сферы, не прибегая к использованию понятия ускорение, придется считать только одну из трех проекций вектора собственно-орбитальной скорости определенной точно: и по модулю, и по направлению (две другие проекции придется считать определенными только по модулю). Это же касается и собственно-орбитального импульса частицы, поскольку он не является самостоятельным понятием, а пропорционален собственно-орбитальной скорости[1].

---

[1] Следует обратить внимание на принципиальное различие определений двух величин: $\vec{V}_{\text{ц.и.}}$ и $\vec{\mathscr{P}}_0$. Скорость центра инерции ($\vec{V}_{\text{ц.и.}}$) является производным понятием, а импульс ($\vec{P}$) центра инерции частицы и ее масса $m \left(= m_0 \sqrt{1 + \left(\frac{P}{m_0 \cdot \varsigma} \right)^2} \right)$ исходными понятиями: $\vec{V}_{\text{ц.и.}} = \frac{\vec{P}}{m}$. Собственно-орбитальный импульс $\vec{\mathscr{P}}_0$ является производным понятием, а собственно-орбитальная скорость ($\vec{u}_\perp$) и масса m являются исходными понятиями: $\vec{\mathscr{P}}_0 = m \cdot \vec{u}_\perp$. Модуль импульса $\vec{\mathscr{P}}_0$ в реальном — трехмерном — случае равен $|\vec{\mathscr{P}}_0| = \sqrt{3} m(P) \cdot \varsigma$.

5. Признавая точно определенной лишь одну проекцию вектора собственно-орбитальной скорости, автоматически приходится признавать точно определенной также лишь одну из трех проекций радиус-вектора той точки собственно-орбитальной сферы, в которой частица появляется, имея соответствующие значения проекций скорости.

6. Точечная частица обладает собственным механическим моментом (спином), абсолютное значение которого оказывается одинаковым для любого инерциального наблюдателя[2].

[2] Следует принять во внимание, что в рамках традиционного варианта частной теории относительности частица считается принципиально не участвующей в собственном вращении (из-за чего спин и считается загадочным понятием). Поэтому бесполезно искать в анналах упомянутой теории выражение $R_0 \cdot m = \mathrm{Inv}$, которое, в свою очередь, привело бы к выражению для абсолютного значения радиуса собственной орбиты.

Глава 10

Частицы и античастицы

10.1. Заряд точечной частицы

Обратимся в очередной раз к соотношению

$$E^2 - (\varsigma \cdot \vec{P})^2 = E_0^2. \tag{54}$$

Теперь нужно принять к сведению тот факт, что инвариантом лоренцевых преобразований является разность именно квадратов величин:

$$E_k^2 - (\varsigma \cdot \vec{P}_k)^2 = E_j^2 - (\varsigma \cdot \vec{P}_j)^2 = E_0^2. \tag{55}$$

Отсюда следует, что выражение

$$E^2 = (\varsigma \cdot \vec{P})^2 + E_0^2 \tag{56}$$

играет роль *математического определения*, но... величины E^2, а не E. Математически же корректное определение величины E таково:

$$E = \begin{cases} +\sqrt{(\varsigma \cdot \vec{P})^2 + E_0^2}; & (57,\text{а}) \\ -\sqrt{(\varsigma \cdot \vec{P})^2 + E_0^2}. & (57,\text{б}) \end{cases}$$

Возникает резонный вопрос: нужно ли настаивать на физически содержательной интерпретации только определения (57, а). Представляется, что единственное объяснение подобной настойчивости может состоять в следующем.

Величина E, фигурирующая в выражениях (57), — это *кинетическая* энергия, и самостоятельным понятием она не является. В рамках дорелятивистской механики кинетическая энергия считалась величиной положительной не только из-за того, что она была квадратичной функцией импульса $\left(E = \dfrac{\vec{P}^2}{2m_0}\right)$. Обоснованно считалось, что инерциальная масса частицы (m_0) могла быть только положительной величиной. В самом деле, обратившись к формуле $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m_0}$, связывающей ускорение $\vec{a}$ и силу $\vec{F}$, легко видеть, что частица с отрицательной массой ускорялась бы в направлении, противоположном действующей силе. Поскольку в рамках релятивистской механики

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m(P)} \cdot \left[1 - \left(\frac{P}{m(P) \cdot \varsigma}\right)^2\right]^{1)},$$

сказанное остается справедливым.

Многие, в том числе и автор этой книги, просто не верят в существование разновидности частиц, способных ускоряться в направлении, противоположном действующей силе.

Принимая во внимание тождество гравитационного заряда частицы ее инерциальной массе покоя, также не верится, что существует разновидность частиц, ***отталкивающихся*** друг от друга за счет гравитационных *сил*[2]. *И, хотя можно весьма хладнокровно объявить* неверие основанным на результатах лишь ***теперешних*** экспериментов, я все-таки предложил бы читателю не обсуждать физико-фантастические гипотезы, навеянные ***исключительно неадекватной интерпретацией математических соотношений***. Вместо этого лучше обратить внимание на то, что драматическая коллизия возникла из-за необходимости, с одной стороны, признать существование ***двух*** величин: $\pm\sqrt{\left(\varsigma \cdot \vec{P}\right)^2 + E_0^2}$, а с другой — посчитать недопустимым отрицательное значение обозначенной символом E полной кинетической энергии свободной точечной частицы.

Выйти из положения предлагается, ***переопределив*** величину E таким образом, чтобы исключить неравенство $E < 0$, не затрагивая определения (56)[3] величины E^2.

С этой целью сначала введем обозначение:

$$\pm\sqrt{\left(\varsigma \cdot \vec{P}\right)^2 + E_0^2} \equiv \tilde{E} \tag{58}$$

(имея в виду, что величина $\tilde{E}$ может быть как положительной, так и отрицательной), а затем примем такое определение полной кинетической энергии E:

$$E = q\left(\tilde{E}\right) \cdot \tilde{E}, \tag{59}$$

---

[1] Из приведенного соотношения следует, в частности, что безмассовая частица ($m_0 = 0$) не может испытывать ускорения под действием силы. См. также Приложение 3.

[2] Постулируя тождество гравитационного заряда частицы ее инерциальной массе покоя, приходится, конечно, выходить за пределы частной теории относительности.

[3] Определение (56) мы обязаны считать незыблемым, так как оно является преобразованным соотношением (55), которое признано выражающим закон природы.

в котором присутствует новая величина

$$q\left(\widetilde{E}\right) = \begin{cases} +1 & \text{при} \quad \widetilde{E} > 0, \\ -1 & \text{при} \quad \widetilde{E} < 0. \end{cases} \tag{60}$$

Видно, что $E^2 = \widetilde{E}^2$.

Назовем пока что новую величину q «зарядом» (в кавычках). Одно из требований к «заряду» — принимать только два «численных» значения: $+1$ и -1. Далее предлагается отнести «заряд» к категории характеристик-констант, отображающих себетождественность частицы и, стало быть, не изменяющихся при «переходах» из одной системы отсчета в другую. Тогда формула преобразования величины $\widetilde{E}$ ***вынужденно*** оказывается идентичной формуле преобразования величины E.

Теперь следует обратить внимание на естественность выделения по крайней мере двух разновидностей точечных частиц:

а) ***массивных*** $(m_0 > 0)$, для которых

$$E = q\left(\widetilde{E}\right) \cdot \widetilde{E}; \quad \widetilde{E} = \pm\sqrt{\left\langle \left(\vec{u} \cdot \langle \vec{P} \rangle_{\Delta t_0}\right)^2 \right\rangle_{\Delta t} + m_0^2 \cdot \left\langle \left(\vec{u} \cdot \langle \vec{u}_0 \rangle_{\Delta t_0}\right)^2 \right\rangle_{\Delta t}};$$

б) ***безмассовых*** $(m_0 = 0)$, для которых

$$E = q\left(\widetilde{E}\right) \cdot \widetilde{E}; \quad \widetilde{E} = \pm\sqrt{\left\langle \left(\vec{u} \cdot \langle \vec{P} \rangle_{\Delta t_0}\right)^2 \right\rangle_{\Delta t}}.$$

Поскольку $\langle \vec{u} \rangle_{\Delta t} = \left\langle \dfrac{\vec{P}}{m(P)} + \vec{u}_0 \right\rangle_{\Delta t}$, очевидно, что как в случае массивной, так и безмассовой частицы, величина $\widetilde{E}$ оказывается функцией не только импульса $(\vec{P})$ центра инерции частицы, но и ее собственно-орбитальной скорости $(\vec{u}_0)$.

Необходимость приписать собственно-орбитальную скорость всем разновидностям точечных частиц отражает невозможность существования в физической реальности бесспиновых точечных частиц.

10.2. «Заряд» безмассовой частицы

Чтобы выяснить, существует ли такая, обладающая физической содержательностью, характеристика безмассовой точечной частицы, с которой можно было бы отождествить ее «заряд» q, нужно сначала вернуться к способу описания собственного вращения точечной частицы, разработанного в § 7.1.

Постулировав, что частица способна вращаться в пустоте, не испытывая центростремительного ускорения, пришлось ввести в механику понятие «вероятность». После этого оказалось, что с точки зрения любого инерциального наблюдателя лишь одна из трех проекций собственно-орбитальной скорости имеет в любой момент времени определенное значение. Каждая из двух других проекций может с равной вероятностью в любой момент времени иметь значения, отличающиеся знаком. В таком случае лишь одна из трех проекций спина частицы имеет определенное значение.

Сказанное поясняется с помощью рис. 11. Ради удобства *все* характеристики частицы переадресованы ее центру инерции, а ось X системы отсчета совмещена с вектором $\vec{P}$. Система отсчета выбрана не связанной с центром инерции частицы.

В ответ на вопрос, как ориентирован вектор спина относительно вектора импульса центра инерции, нужно сказать: в любой момент времени спин с равной вероятностью представляется любой из бесконечно большого числа образующих конуса длиной $\frac{\sqrt{3}\hbar}{2}$, при том что вершина конуса располагается в центре инерции частицы. В этом случае угол между векторами импульса $\vec{P}$ и спина $\vec{S}$ имеет в любой момент времени одно и то же значение. Однако совершенно очевидно, что возможны два (*и только два*) случая: когда косинус угла равен $+\sqrt{\frac{1}{3}}$, и когда он равен $-\sqrt{\frac{1}{3}}$. Иначе говоря, та проекция спина ($S_{\vec{P}}$), которая сохраняет одно и то же значение в любой момент времени движения безмассовой точечной свободной частицы, может быть равна либо $+\frac{\hbar}{2}$, либо $-\frac{\hbar}{2}$. Это обстоятельство дает возможность определить «заряд» частицы следующим образом:

$$q \equiv \frac{S_{\vec{P}}}{|S_{\vec{P}}|} = \frac{|S_{\vec{P}}|}{S_{\vec{P}}} = \begin{cases} +1 & \text{при} \quad S_{\vec{P}} = \frac{\hbar}{2}; \\ -1 & \text{при} \quad S_{\vec{P}} = -\frac{\hbar}{2}. \end{cases}$$

С учетом рис. 8 и рис. 12 (см. с. 95) имеет смысл использовать в качестве названия q-«заряда» термин «спиральность».

Следует заметить, что статус характеристики-константы приобрел угол между векторами $\vec{P}$ и $\vec{S}$. Но так оно и должно быть, поскольку центр инерции безмассовой частицы в любой инерциальной системе отсчета (не связанной с центром инерции частицы) должен выглядеть движущимся со скоростью, модуль которой точно равен ς[4]. Тогда никакой наблюдатель не сможет перегнать безмассовую частицу и тем самым увидеть, как угол между векторами $\vec{P}$ и $\vec{S}$ изменился на 180° (в этом случае изменился бы знак косинуса).

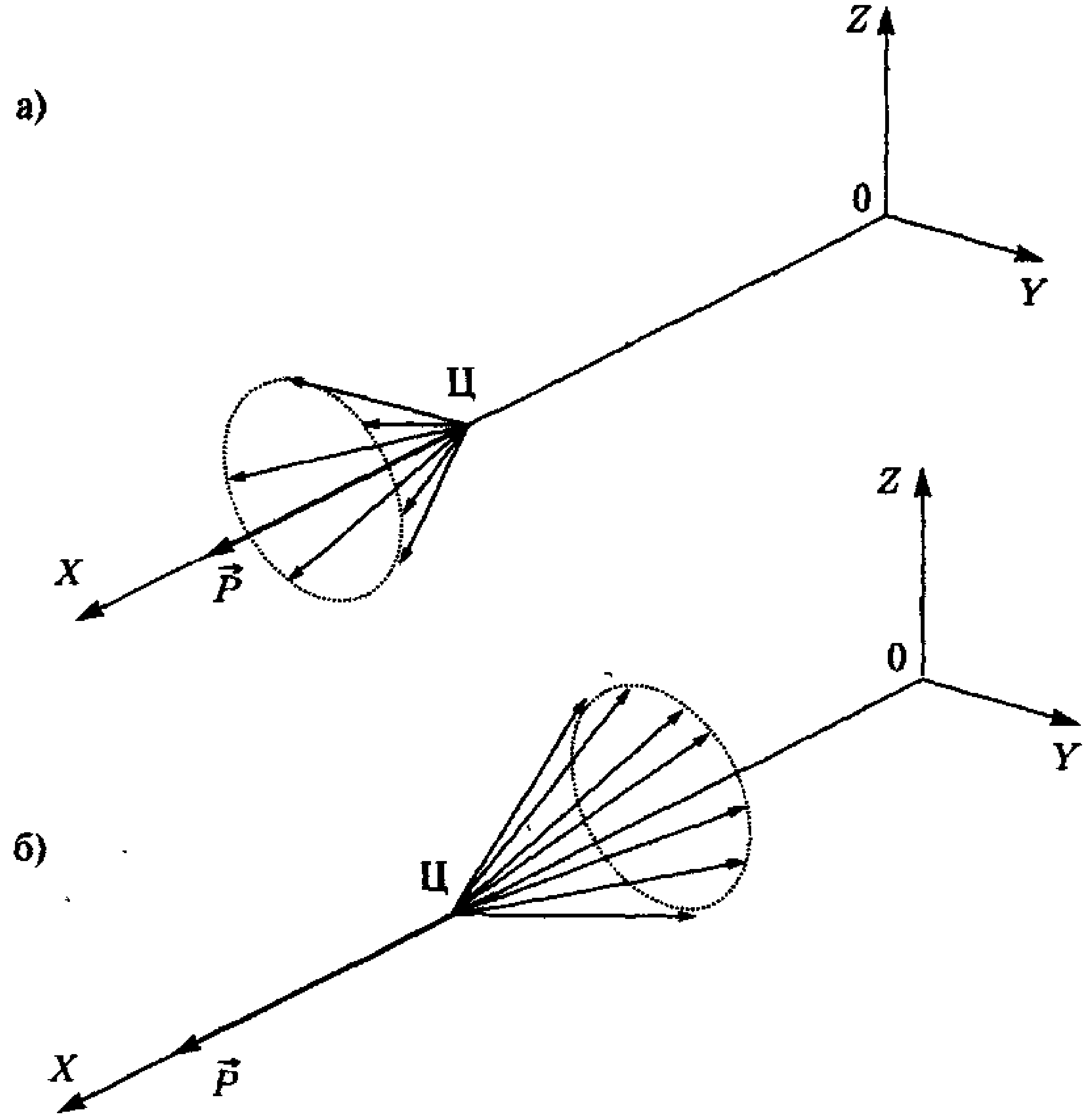

Рис. 11. «Прецессия».

Вектор $\vec{S}$ в любой момент времени совпадает — с равной вероятностью — с любой образующей конуса. При этом скалярное произведение $\vec{S} \cdot \vec{P}$ либо неизменно положительное (*а*), либо неизменно отрицательное (*б*).

[4] В системе отсчета, связанной с самим центром инерции, импульс и скорость последнего равны нулю *тождественно*, поэтому понятие угла между вектором $\vec{S}$ и, например, импульсом лишено математической содержательности.

Из сказанного следует важный вывод: точечные безмассовые частицы могут быть по крайней мере двух *качественно* разных подвидов:

обладающих правой спиральностью,
обладающих левой спиральностью.

При этом обоим подвидам отвечает *идентичный* энергетический спектр (зависимость E от $\vec{P}$).

Совершенно самостоятельные соображения необходимо привлечь, чтобы назвать точечные безмассовые частицы, отличающиеся единственно спиральностью, именно частицей и античастицей. Подобные соображения появились после экспериментального установления явлений аннигиляции и трансмутации частиц[5].

В заключение имеет смысл пояснить, почему статус характеристики-константы приобрел угол (угол между векторами $\vec{P}$ и $\vec{S}$). С этой целью рассмотрим экспериментальную обстановку, в которой на X-оси системы координат $\{X, Y, Z\}$ присутствуют три объекта. Один из них — массивный наблюдатель Н_1 — жестко связан с X-осью и вечно находится в начале координат. Два других — массивный наблюдатель Н_2 и центр инерции точечной частицы, вокруг которого она вращается, — вечно движутся вдоль X-оси прямолинейно и равномерно.

Проанализируем ситуацию (рис. 12, а), в которой с точки зрения наблюдателя Н_1 и центр инерции Ц, и наблюдатель Н_2, начиная с момента t_0, *удаляются* (от Н_1) в положительном направлении X-оси

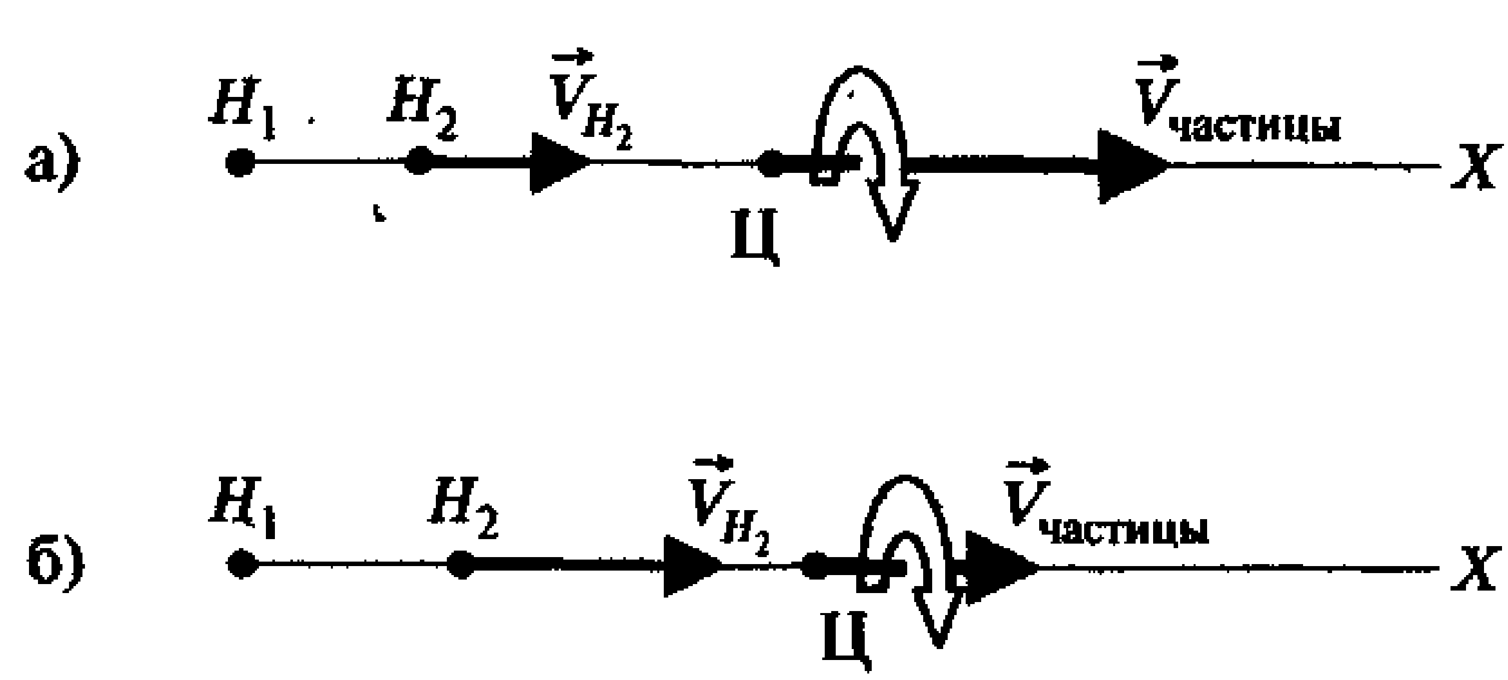

Рис. 12. Образ движущейся точечной частицы в глазах двух инерциальных наблюдателей.

На рис. 12, б положение частицы показано также в тот момент времени, когда она находится еще *впереди обоих* наблюдателей.

[5] Аннигиляция — это явление, в котором две точечные частицы, столкнувшись, превращаются в материальный континуум (например, в электромагнитное поле). Трансмутация — это явление, в котором некоторое число точечных частиц одних разновидностей превращается в то или иное число точечных частиц других разновидностей.

со скоростями, модуль каждой из которых меньше ς, причем скорость наблюдателя H_2 меньше скорости центра Ц ($V_{H_2} < V_Ц$). В этом случае каждый из наблюдателей видит ***перед собой вечно удаляющуюся*** частицу, каждый видит частицу, вращающейся ***вечно в одну и ту же*** сторону, предположим, ***по*** часовой стрелке. Допустим, что это и есть достаточное основание для обоих наблюдателей считать, что видят они ***вечно одну и ту же*** частицу (себетождественный объект).

Проанализируем теперь другую ситуацию (рис. 12, б), в которой — опять-таки с точки зрения наблюдателя H_1 — центр инерции Ц и наблюдатель H_2 начиная с момента t_0 удаляются от H_1 в положительном направлении X-оси со скоростями, модуль каждой из которых меньше ς, но теперь $V_{H_2} > V_Ц$. Ситуация для H_1 по сравнению с первой не изменилась. Однако для H_2 ситуация стала зависящей от расстояния между H_2 и Ц в момент t_0. Если это расстояние не было бесконечно большим, то в течение ограниченного (сверху) промежутка времени Δt наблюдатель H_2, в отличие от H_1, будет видеть ***перед собой*** частицу хотя и вращающейся ***по*** часовой стрелке, но ***приближающейся***. Спустя время Δt наблюдатель H_2 начнет видеть ***перед собой*** частицу уже вечно удаляющейся, но вращающейся ***против*** часовой стрелки. С точки зрения H_1 это объясняется тем, что второй наблюдатель обогнал центр инерции и смотрит уже не вперед, а назад, почему и видит частицу вращающейся в сторону, противоположную прежней[6]. Таким образом, если отнести угол между векторами $\vec{P}$ и $\vec{S}$ к категории характеристик-констант, то в анализируемой ситуации каждый из двух ***инерциальных*** наблюдателей вынужден считать, что хотя и видит перед собой ***вечно удаляющуюся*** частицу, но вовсе не одну и ту же.

А теперь следует заметить, что если модуль скорости центра инерции частицы относительно H_1 точно равен ς, то и относительно H_2 (и относительно любого — в том числе безмассового — инерциального наблюдателя) модуль этой скорости точно равен ς. Поэтому никакой инерциальный наблюдатель, не находящийся (в любой момент времени из вечности) в той же точке, что и центр инерции безмассовой частицы, никогда его даже и не догонит.

Есть еще одно обстоятельство, касающееся двух объектов, существующих вечно и движущихся вдоль общей прямой. На каком бы расстоянии друг от друга ни находились два таких объекта в некоторый момент времени (из вечности), они не могут вечно сближаться,

[6] Для изолированной от всего — единственной — пары объектов «наблюдатель H_2» и «частица» понятия «сзади» и «спереди» бессодержательны. В подобной ситуации два объекта могут либо сближаться, либо удаляться, либо оставаться на неизменном расстоянии друг от друга.

но могут вечно удаляться. Поэтому, когда заходит речь об опознании наблюдателями точечной частицы, вращающейся вокруг движущегося (прямолинейно и равномерно в выбранной системе координат) центра инерции, то необходимо указывать, в течение какого — ограниченного или неограниченно большого — промежутка времени непрерывно (или достаточно часто) ведется опознание. Правильно считать, что только *вечно и непрерывно* продолжающийся процесс опознания позволяет судить о себетождественности частицы.

10.3. Заряд массивной частицы

Отныне величина $\widetilde{E}$, так и не получившая названия, должна считаться отношением двух физических характеристик — полной кинетической энергии частицы E и ее заряда q:

$$\widetilde{E} = \frac{E}{q}, \quad \text{причем} \quad E > 0, \quad \text{а} \quad q = \pm 1 \text{ [7]}.$$

В случае безмассовой частицы такое выражение для $\widetilde{E}$ себя оправдало, поскольку оказалось, что векторы $\vec{P}$ и $\vec{S}$ обязательно находятся под углом друг к другу, а косинус угла $\langle \vec{S}, \vec{P} \rangle$ может принимать только два численно одинаковых значения, отличающихся знаком.

В случае массивной частицы складывается совершенно иная ситуация. Масса m_0 считается принципиально имеющей лишь одно — положительное — значение. А поскольку модуль скорости центра инерции массивной частицы обязательно меньше ς (относительно любой системы отсчета), то и спиральность не может выступать в роли характеристики-константы).

Таким образом, остается *единственное* — попросту *постулировать*, что частица, обладая ненулевой массой покоя ($m_0 \neq 0$), *автоматически* обладает зарядом уже без кавычек. На роль этого заряда массивной частицы вполне допустимо привлечь двузначный электрический заряд.

Следует заметить, что, хотя свободная массивная частица, подобно безмассовой, и может обладать определенной спиральностью, каждому значению полной кинетической энергии ($0 < E \leqslant \infty$) отвечают два разных спиральностных состояния *одной и той же* (себетождественной) массивной и заряженной частицы.

---

[7] Также вполне допустимо считать, что $\widetilde{E} = q \cdot E$.

Итак, напрашиваются следующие выводы.

1. *Точечность частицы предполагает обязательное участие ее во вращении по собственной орбите и, следовательно, обладание спином.*

Не может существовать точечная, но притом бесспиновая частица.

2. *В физической реальности могут существовать точечные частицы только таких разновидностей:*

а) безмассовые ($m_0 = 0$), притом зарядо-электронейтральные, притом обладающие неизменяемой спиральностью;

б) массивные ($m_0 \neq 0$), притом обладающие неизменяемым электрическим зарядом, притом способные менять спиральность.

Не может существовать точечная и массивная, но незаряженная частица, равно как точечная и безмассовая, но заряженная[8]***.***

---

[8] Поэтому масса покоя как нейтрино, так и антинейтрино должна быть равна нулю точно.

Приложение 1

Понятие о средней скорости

Если точечная частица вечно осциллирует (или вращается) около некоего центра (удобно считать его началом пространственных координат), она попадает в выбранную точку пространства (ради простоты, в точку X-оси) многократно (через равные или разные промежутки времени). Поэтому понятие ***локальной*** скорости, усредненной по времени, обладает физической содержательностью, и эту скорость можно определить выражением

$$\left\langle \vec{V}(x)\right\rangle_{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to\infty}\left\{\frac{1}{\Delta t}\cdot\int\limits_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}}\vec{V}(x,t)\cdot dt\right\}.$$

Здесь $\vec{V}(x,t)$ — ***мгновенно-локальная*** скорость частицы, причем обе величины — x и t — должны в этом случае считаться ***независимыми*** переменными.

Далее можно, конечно, образовать и такую вот конструкцию

$$\lim_{\Delta x\to\infty}\left\{\frac{1}{\Delta x}\cdot\int\limits_{-\frac{\Delta x}{2}}^{+\frac{\Delta x}{2}}\left\langle \vec{V}(x)\right\rangle_{\Delta t}\cdot dx\right\} = \lim_{\substack{\Delta x\to\infty\\ \Delta t\to\infty}}\left\{\frac{1}{\Delta x\cdot\Delta t}\cdot\int\limits_{-\frac{\Delta x}{2},-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta x}{2},+\frac{\Delta t}{2}}\vec{V}(x,t)\cdot dx\cdot dt\right\},$$

обозначив ее символом $\left\langle \vec{V}\right\rangle_{\Delta t,\Delta x}$. Хотя эта величина (казалось бы естественным назвать ее скоростью, усредненной по пространству-времени) и обладает содержательностью, редко в какой ситуации ею можно было бы воспользоваться.

Если частица вечно движется, например, прямолинейно и в одном направлении (так, что попадает в одну точку пространства лишь один раз — на одно мгновение), то понятие скорости локальной, но усредненной по времени $\left(\left\langle \vec{V}(x)\right\rangle_{\Delta t}\right)$ физически бессодержательно: в этой ситуации скорость оказывается функцией только времени $\left(\vec{V}\equiv\vec{V}(t)\right)$.

Тем не менее, очевидно, что в рассматриваемой ситуации скорость частицы, усредненная по времени, автоматически играет роль усредненной также и по пространству. То есть каждой точке x из интервала Δx пройденного пути отвечает одно и то же значение скорости, совпадающее со значением, средним по времени. Определив среднюю по времени скорость прямолинейного движения традиционным выражением

$$\langle \vec{V} \rangle_{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to \infty} \left\{ \frac{1}{\Delta t} \cdot \int\limits_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} \vec{V}(t) \cdot dt \right\},$$

можно считать, что $\langle \vec{V} \rangle_{\Delta x, \Delta t} = \langle \vec{V} \rangle_{\Delta t}$ [1].

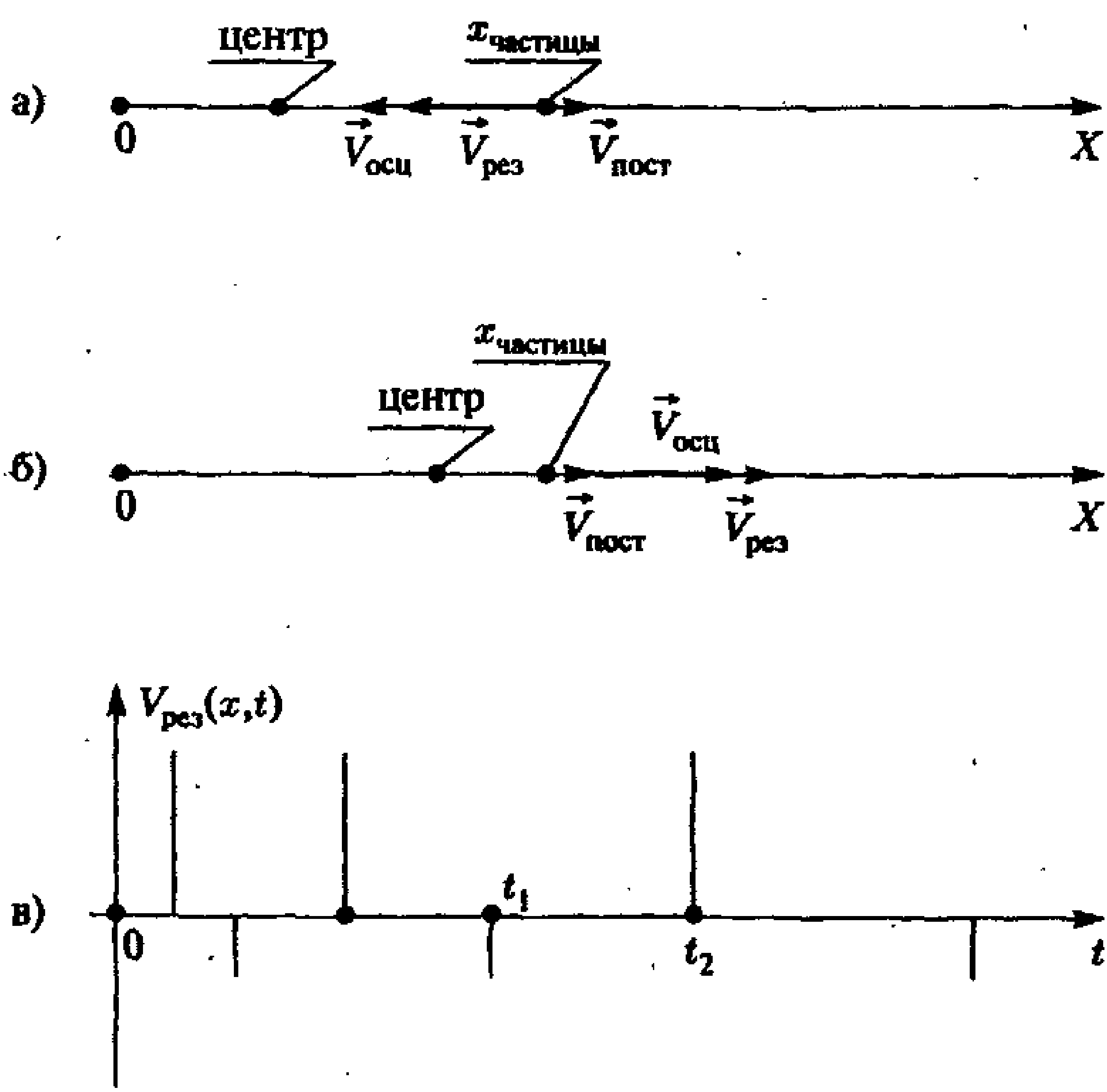

Рис. 1. Участие частицы в двух движениях.

Показаны положения частицы и центра осцилляций, а также скорости частицы в моменты времени t_1 и t_2. (Простоты ради абсолютные значения скоростей приняты не зависящими от времени.)

[1] Скорость $\langle \vec{V} \rangle_{\Delta x, \Delta t}$ можно определить еще и так:

$$\langle \vec{V} \rangle_{\Delta x, \Delta t} = \frac{\overrightarrow{\Delta x}}{\Delta t(\to \infty)} = \frac{\overrightarrow{\Delta x(\to \infty)}}{\Delta t}.$$

Если же частица участвует в двух независимых движениях — осциллирующем (около некоего центра) и поступательном (самого центра), — можно ввести понятия результирующей скорости *частицы* ($\vec{V}_{рез}$) и ее же осцилляционной (назову ее так) скорости ($\vec{V}_{осц}$).

Справедливо полагая, что

$$\vec{V}_{рез} = \vec{V}_{осц}(x,t) + \vec{V}_{пост}(t) = \vec{V}_{рез}(x,t)$$

(где $\vec{V}_{пост}(t)$ — мгновенная скорость *центра*), x-координату нужно считать координатой точки, в которой *в момент* t *оказывается частица*. Пояснить сказанное призван рис. 1.

Как следует из рис. 1, при усреднении результирующей скорости по *достаточно большому* промежутку времени имеет место совпадение средних по времени результирующей скорости частицы и скорости центра осцилляций: $\langle\vec{V}_{рез}\rangle_{\Delta t} = \langle\vec{V}_{пост}\rangle_{\Delta t}$. Естественно, что $\langle\vec{V}_{рез}\rangle_{\Delta t}$ не зависит от x. Кроме того, как уже говорилось, средняя по времени скорость поступательного движения центра, около которого осциллирует частица, автоматически выполняет функцию скорости центра, усредненной еще и по пространству:

$$\langle\vec{V}_{пост}\rangle_{\Delta x,\Delta t} \equiv \langle\vec{V}_{пост}\rangle_{\Delta t}.$$

Здесь $\overrightarrow{\Delta x}$ — это разность координат двух точек X-оси, в которых частица появлялась в два момента времени, разделенные промежутком Δt. В этом случае величина $\overrightarrow{\Delta x}$ не является пройденным путем (частица могла двигаться и вперед, и назад вдоль X-оси в течение промежутка времени Δt) и, стало быть, не является функцией величины t.

Приложение 2

О нерелятивистском приближении в механике точечных частиц

Рассмотрим традиционное выражение для полной кинетической энергии свободной точечной частицы

$$E = \varsigma \cdot \sqrt{\vec{P}^2 + (m_0 \cdot \varsigma)^2}. \tag{1}$$

Определим понятие ***работы*** (A), совершаемой над частицей или самой частицей, как ***разность ее полных кинетических энергий***[1]. А, поскольку измениться кинетическая энергия может только из-за изменения импульса центра инерции частицы, выражению для величины A следует придать форму:

$$A = E\left(\vec{P}_1\right) - E\left(\vec{P}_2\right). \tag{2}$$

Пусть теперь $\left(\dfrac{\vec{P}}{m_0 \cdot \varsigma}\right)^2 < 1$. Тогда выражения (1) и (2), играющие роль определений величин E и A, принимают вид*

$$E = m_0 \cdot \varsigma^2 + \frac{\vec{P}^2}{2m_0} - \frac{\vec{P}^2}{2m_0} \cdot \left(\frac{P}{2m_0 \cdot \varsigma}\right)^2 + \ldots; \tag{3, а}$$

$$A = E_1 - E_2 = \frac{\vec{P}_1^2 - \vec{P}_2^2}{2m_0} - \frac{\vec{P}_1^4 - \vec{P}_2^4}{8m_0^3 \cdot \varsigma^2} - \ldots. \tag{4, а}$$

Учитывая, что $\vec{P}$ — величина переменная, а ς — константа, обсудим два предложения.

1. Будем считать, что $\left(\dfrac{\vec{P}}{m_0 \cdot \varsigma}\right)^2 \ll 1$, но величина ς ***ограничена сверху***. Тогда с ***одинаково*** хорошей точностью

$$E \approx m_0 \cdot \varsigma^2 + \frac{\vec{P}^2}{2m_0}; \tag{3, б}$$

$$A = E_1 - E_2 \approx \frac{\vec{P}_1^2 - \vec{P}_2^2}{2m_0}; \quad \left|\vec{P}_1\right| \neq \left|\vec{P}_2\right|. \tag{4, б}$$

---

[1] Подобное определение применимо в случае, когда изменение энергии частицы происходит, например, в результате столкновения ее с подобной же частицей. На самом деле подобное столкновение является мгновенным совпадением центров инерции частиц.

Необходимо подчеркнуть, что физической содержательностью, как следует из выражений (3, б) и (4, б), обладают понятия ***порознь***: полная кинетическая энергия E и работа A. Обе эти величины определяются с помощью понятия «импульс ($\vec{P}$) центра инерции частицы», считающегося понятием неопределяемым.

Интерпретируя соотношение (3, б), любой инерциальный наблюдатель должен считать массу частицы m, а также радиус собственной орбиты R и собственную частоту вращения ω величинами, не изменяющимися при изменении импульса центра инерции. При этом величина m считается отличной от нуля, из-за чего R и ω также оказываются отличными от нуля:

$$m = m_0 \neq 0; \quad R = R_0 = \frac{\sqrt{3}\hbar}{2m_0 \cdot \varsigma}; \quad \omega = \omega_0 = \frac{2m_0 \cdot \varsigma^2}{\hbar}.$$

Конечно, на самом деле, при изменении значения импульса центра инерции частицы должны обязательно измениться и значения величин m, R, ω. Просто изменения последних трех величин ничтожны по сравнению с ними самими.

2. Теперь, по-прежнему полагая, что $\left(\frac{\vec{P}}{m_0 \cdot \varsigma}\right)^2 \ll 1$, ***величину*** ς ***станем считать бесконечно большой***. Тогда из выражения (3, а) следует, что

$$E = \infty. \tag{3, в}$$

Тем не менее, из выражения (4, а) следует, что

$$A = \frac{\vec{P}_1^2 - \vec{P}_2^2}{2m_0}. \tag{4, в}$$

Равенства (3, в) и (4, в) — ***точные***, и потому уже нельзя считать, что $A = E_1 - E_2$. Ведь $E_1 = E_2 = \infty$.

Таким образом, ***определения*** (1) и (2), выродившись в выражения (3, в) и (4, в), оказываются несовместимыми.

Интерпретация выражения (3, в) состоит в признании бесконечно большого значения кинетической энергии — энергии вращения частицы по собственной орбите; ***но не из-за бесконечно большой массы покоя***, а из-за бесконечно большой собственно-орбитальной скорости. В свою очередь, при этом

$$m = \frac{E}{\varsigma^2} = \frac{m_0 \cdot \varsigma^2}{\varsigma^2} = m_0; \quad R = \frac{\sqrt{3}\hbar}{2m_0 \cdot \varsigma} = 0; \quad \omega = \frac{2E}{\hbar} = \infty,$$

так что значения всех трех величин должны считаться неизменяемыми.

Но тогда и значение импульса центра инерции частицы следовало бы считать неизменным. А иначе следовало бы ожидать, что изменится (уменьшится) радиус собственной орбиты (который уже равен нулю), а также изменится (увеличится) собственная частота вращения (которая уже бесконечно велика).

Все сказанное означает, что в глазах любого инерциального наблюдателя импульс центра инерции частицы оказывается величиной неизменяемой и притом численно неопределенной (попросту говоря, физически бессодержательной). А тем не менее, из соотношения (4, в) вытекает, что импульс $\vec{P}$ следует считать величиной изменяемой и численно полностью определенной[2].

Таким образом, соотношения (3, б) и (4, б) совместимы, а соотношения (3, в) и (4, в) на самом деле несовместимы.

Несовместимость последних соотношений является прямым следствием предложения считать, что $\varsigma = \infty$. Поэтому единственная возможность сохранить память об этом предложении, не приходя к противоречиям, состоит в следующем:

1) *Выражение (1), определяющее энергию E, заменить выражением*

$$E = \frac{\vec{P}^2}{2m_0}, \tag{5}$$

причем допустимыми признать все значения импульса в пределах от нуля до бесконечности[3]. *Выражения (5) и (2) являются совместимыми*;

2) *Частицу признать неуничтожаемой и несоздаваемой*[4];

3) *Даже считая точечную частицу обладающей спином (собственным механическим моментом), все-таки «отнять» у нее собственно-вращательную степень свободы, после чего точка нахождения частицы в пространстве всегда и повсюду окажется совпадающей с точкой*

---

[2] Соотношение (4, б) в пределе $\left(\dfrac{\vec{P}}{m_0 \cdot \varsigma}\right)^2 \to 0$ совпадает с соотношением (4, в), несмотря на то, что первому отвечает неравенство $\varsigma \neq \infty$, а второму равенство $\varsigma = \infty$.

[3] При условии $m_0 \cdot \varsigma \to \infty$ значение импульса также может быть бесконечно большим, и это не будет противоречить неравенству $\left(\dfrac{\vec{P}}{m_0 \cdot \varsigma}\right) \ll 1$.

[4] Тогда оказывается, что даже в той системе отсчета, в которой и кинетическая, и потенциальная энергии точечной частицы равны нулю, наблюдатель обязан считать частицу существующей. Что же касается частицы, обладающей *конечным* значением величины $m_0 \cdot \varsigma^2$, то такая частица и уничтожаема, и создаваема, поскольку на то и другое требуется конечная, а не бесконечно большая энергия.

нахождения в пространстве центра инерции частицы. Таким образом, центр инерции частицы отождествляется с ней самой[5].

Совершенно очевидно, что представленную совокупность свойств никак нельзя считать вытекающей из ***нерелятивистского*** приближения в его традиционном понимании. Эта совокупность свойств отражает, если так можно выразиться, антирелятивистскую (или дорелятивистскую) механику частиц, в которой условие $\varsigma = \infty$, как выяснилось, было ***скрытым***[6], но весьма действенным. Таким образом, дорелятивистская механика является логически непротиворечивой.

Нерелятивистское приближение можно считать реализуемым только при соблюдении ***двух*** условий:

$$\varsigma \neq \infty; \quad \left(\frac{\vec{P}}{m_0 \cdot \varsigma}\right)^2 \ll 1.$$

Теперь рассмотрим еще один аспект приближения, в рамках которого $\varsigma \to \infty$. Обратимся к нижеследующим формулам лоренцевой группы:

$$m_k = \eta \cdot \left(m_j - \frac{P_{j,x} \cdot V_0}{\varsigma^2}\right); \tag{6, а}$$

$$P_{k,x} = \eta \cdot \left(P_{j,x} - \frac{E_j}{\varsigma^2} \cdot V_0\right); \tag{6, б}$$

$$E_k = \eta \cdot \left(E_j - P_{j,x} \cdot V_0\right). \tag{6, в}$$

Из формул (6, б) и (6, в) следует, что

$$\left\{E_k^2 - P_{k,x}^2 \cdot \varsigma^2\right\} = \left\{E_j^2 - P_{j,x}^2 \cdot \varsigma^2\right\} = \mathrm{Inv}.$$

Если в формулах (6) перейти к пределу $\varsigma \to \infty$, то $\eta \to 1$, и, учитывая, что $\dfrac{E_j}{\varsigma^2} = m_j$, получаем

$$m_k = m_j \equiv m_0; \tag{7, а}$$

$$P_{k,x} = \left(P_{j,x} - m_0 \cdot V_0\right); \tag{7, б}$$

$$E_k = \left(E_j - P_{j,x} \cdot V_0\right). \tag{7, в}$$

[5] Спин, естественно, становится совершенно загадочным свойством частицы и объяснить его можно только так: радиус собственной орбиты исчезающе мал, собственно орбитальный импульс бесконечно велик (из-за бесконечно большой собственно-орбитальной скорости), а их произведение конечно и «назначено» быть равным $\dfrac{\sqrt{3}\hbar}{2}$.

[6] Характеристика, численное значение которой бесконечно велико, разумеется, не может фигурировать ни в одном из математических соотношений.

Формулы (7, а) и (7, б) обоснованно считаются принадлежащими галилеевой группе. Справедливо ли считать и формулу (7, в) принадлежащей той же группе? Чтобы выяснить это, проверим, является ли конструкция $\left\{E - \frac{P_x^2}{2m_0}\right\}$ инвариантом такой группы формул преобразования, в которую входят формулы (7). Совершенно очевидно, что нет, ибо используя формулы (7), получаем

$$E_k - \frac{P_{k,x}^2}{2m_0} \neq E_j - \frac{P_{j,x}^2}{2m_0}; \quad E_k - \frac{P_{k,x}^2}{2m_0} = E_j - \frac{P_{j,x}^2}{2m_0} + \frac{m_0 \cdot V_0^2}{2}.$$

Однако, как было сказано на с. 9, *«изменение вида соотношения* (между величинами) *после преобразования будет означать не исключение систем отсчета из класса инерциальных, а* ***отказ считать соотношение выражающим закон природы»***. Таким образом, мы оказываемся перед выбором: либо признать неверным традиционное дорелятивистское соотношение $\left\{E - \frac{\vec{P}^2}{2m_0}\right\} = \text{Inv}\ (= 0)$, равно как и соотношение $\left\{(E - m_0 \cdot \varsigma^2) - \frac{\vec{P}^2}{2m_0}\right\} = \text{Inv}\ (= 0)$; либо считать неверной формулу (7, в), которая, тем не менее, следует из верной формулы (6, в) в результате предельного перехода $\varsigma \to \infty$.

Если же вместо формулы (7, в) принять в качестве формулы преобразования кинетической энергии точечной частицы нижеследующую формулу

$$E_k = E_j - P_{j,x} \cdot V_0 + \frac{m_0 \cdot V_0^2}{2}, \tag{8}$$

то ее, разумеется, нельзя признать «нерелятивистским приближением» формулы (6, в). В этом состоит качественное отличие формулы (8) от всех остальных, входящих в галилееву группу формул преобразования физических величин.

Приложение 3

Понятие ускорения в рамках частной теории относительности

Если ускорение ($\vec{a}$), приобретаемое точечной частицей под действием силы ($\vec{F}$), переадресовать ее центру инерции, то ускорение этого центра определяется традиционным выражением

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{d\vec{P}} \cdot \vec{F}, \tag{1}$$

где $\vec{V}$ и $\vec{P}$ — скорость и импульс центра инерции (мгновенно-локальные величины).

Выражение (1) можно вывести, исходя из кинематического определения ускорения как быстроты изменения скорости во времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}. \tag{2}$$

Обратимся к динамическому определению мгновенно-локальной скорости ($\vec{V}$), согласно которому величина $\vec{V}$ является функцией импульса $\vec{P}$:

$$\vec{V} = \frac{\vec{P}}{m} = \frac{\vec{P}}{m_0 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{P}{m_0 \cdot \varsigma}\right)^2}}. \tag{3}$$

В этом случае выражение (2) следует преобразовать к виду

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{d\vec{P}} \cdot \frac{d\vec{P}}{dt}. \tag{4}$$

Если считать, что сила, действующая на частицу (например, со стороны силового поля), изменяет непосредственно импульс ее центра инерции — величину $\vec{P}$, — то

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}, \tag{5}$$

и тогда из выражений (4) и (5) последует выражение (1).

В рамках дорелятивистской механики имело место соотношение $\vec{V} = \frac{\vec{P}}{m_0}$, так что

$$\frac{d\vec{V}}{d\vec{P}} = \frac{1}{m_0}, \quad \text{и} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{d\vec{P}} \cdot \vec{F} = \frac{1}{m_0} \cdot \vec{F}.$$

В рамках частной теории относительности имеет место соотношение (3), и потому

$$\frac{dV_x}{dP_x} = \frac{1}{m} \cdot \left[1 - \left(\frac{P}{m \cdot \varsigma}\right)^2\right] \quad \text{и т. п.}$$

Здесь: $m = m_0 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{P}{m_0 \cdot \varsigma}\right)^2}$, $P^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2$.

Таким образом, истинное выражение для ускорения центра инерции точечной частицы имеет вид

$$\vec{a} = \vec{e}_x \cdot \frac{F_x}{m} \cdot \left[1 - \left(\frac{P}{m \cdot \varsigma}\right)^2\right] + \vec{e}_y \cdot \frac{F_y}{m} \cdot \left[1 - \left(\frac{P}{m \cdot \varsigma}\right)^2\right] + \\ + \vec{e}_z \cdot \frac{F_z}{m} \cdot \left[1 - \left(\frac{P}{m \cdot \varsigma}\right)^2\right]. \tag{6}$$

Из выражения (6) следует, что если во время действия силы все же сохраняется неравенство $P^2 \ll (m_0 \cdot \varsigma)^2$, то в течение *этого* времени $|\vec{a}| \approx \frac{|\vec{F}|}{m_0}$. Однако $\lim\limits_{P \to \infty} |\vec{a}| = 0$.

Что же касается безмассовой частицы ($m_0 = 0$), то, как следует из выражения (6), ее центр инерции не может испытывать ускорения (если $m_0 = 0$, то $m = \frac{P}{\varsigma}$). Только так и должно быть, ибо, согласно одному из постулатов частной теории относительности, проекция скорости центра инерции безмассовой частицы на любую ось координат не может изменяться (остается равной ς). Таким образом, сила, действующая на безмассовую частицу, меняет импульс ее центра инерции и ее массу движения, но не абсолютное значение ее скорости.

Теперь следует обратить внимание на одно обстоятельство.

Именно: если отождествить инерциальную массу частицы (меру ее реакции на приложенную к ней силу) с ее гравитационным «зарядом», то так называемое «гравитационное ускорение» (разумеется, «ускорение» центра инерции), испытываемое частицей, оказывается независящим от ее массы движения (от величины m). Да и выражение для «гравитационного ускорения» не имеет ничего общего с выражением (6).

Целесообразно рассмотреть такой совершенно идеализированный пример: статическое, пространственно однородное гравитационное поле, созданное массивной бесконечно протяженной плоскостью (рис. 1). В этом случае в каждой точке, например, полупространства $Y > 0$ частица испытывает одинаковое «гравитационное ускорение», равное по абсолютной величине $a_{гр} = \frac{\mu}{2g_0}\left(\frac{см}{с^2}\right)$, где μ — поверхностная плотность массы — источника поля, — распределенной равномерно в плоскости $Y = 0$; g_0 — гравитационная постоянная, численно равная $\approx 1{,}2 \cdot 10^6\ \frac{г \cdot с^2}{см^3}$.

Следует обратить особое внимание на то, что в рассматриваемой ситуации «ускорение» $\vec{a}_{гр}$ не является реакцией частицы на силу притяжения к «заряженной» плоскости. Другими словами, «ускорение» $\vec{a}_{гр}$ не играет роли следствия, а сила притяжения $\vec{F}_{гр}$ не играет роли причины[1]. Очевиден огромный контраст по сравнению с ситуацией, описываемой выражением (6), в котором сила играет роль причины, а ускорение — следствия.

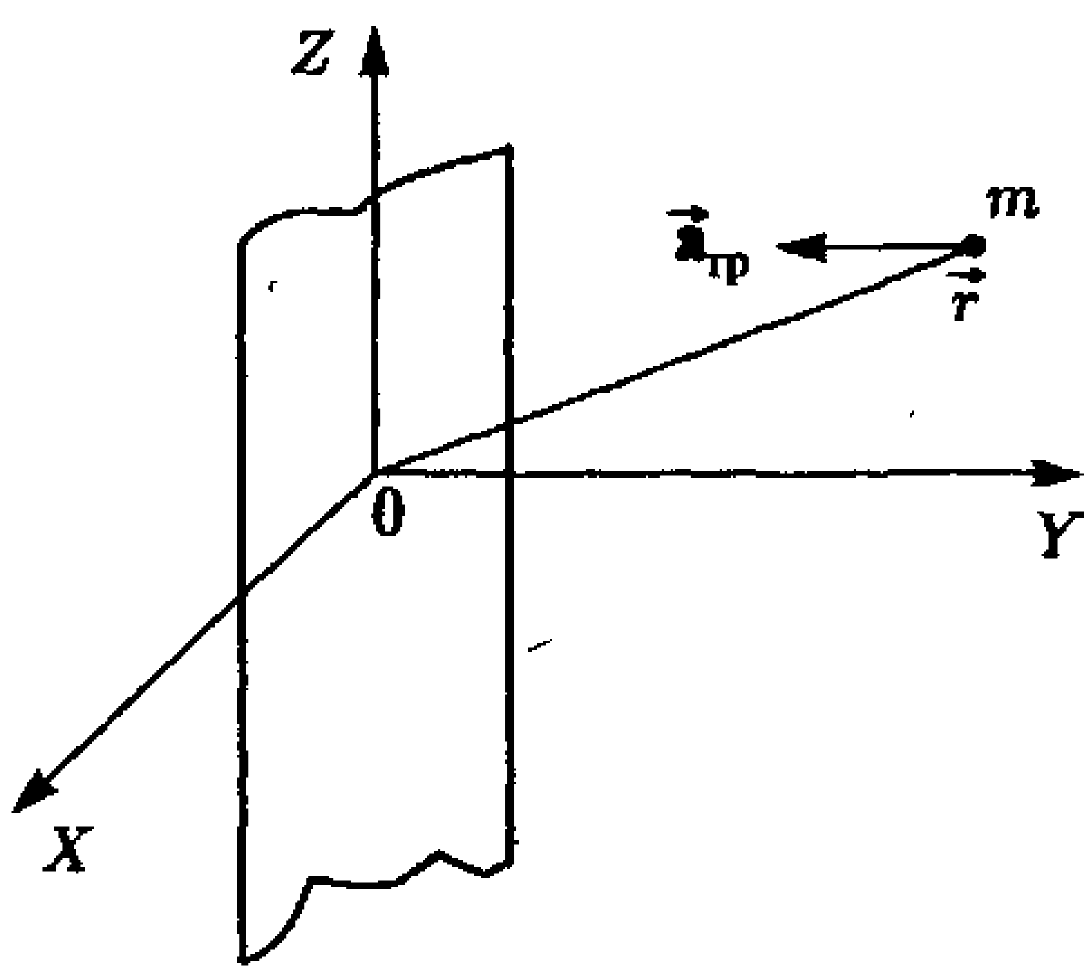

Рис. 1. Конфигурация гравитационного поля.

[1] Именно это и отличает так называемую «силу инерции» от обычных — «сторонних» сил.

В рассматриваемой ситуации «гравитационное ускорение» по сути дела, является напряженностью гравитационного поля, созданного массивной плоскостью. Естественно тогда, что в этом поле импульс центра инерции частицы будет меняться с быстротой

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{гр}} = m \cdot \vec{a}_{\text{гр}} \tag{7}$$

(ведь величина m отождествлена с гравитационным зарядом частицы)[2].

Так как $m = m_0 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{P}{m_0 \cdot \varsigma}\right)^2}$, и $\vec{a}_{\text{гр}}$ не зависит от t, уравнение (7) преобразуется к виду

$$\int_0^P \frac{dP}{\sqrt{1 + \left(\frac{P}{m_0 \cdot \varsigma}\right)^2}} = m_0 \cdot a_{\text{гр}} \cdot \int_0^t dt, \tag{8}$$

если считать, простоты ради, что $P(t = 0) = 0$.

Решив уравнение (8), получаем

$$P = m_0 \cdot \varsigma \cdot \text{sh}\left(\frac{a_{\text{гр}} \cdot t}{\varsigma}\right), \quad m = m_0 \cdot \text{ch}\left(\frac{a_{\text{гр}} \cdot t}{\varsigma}\right).$$

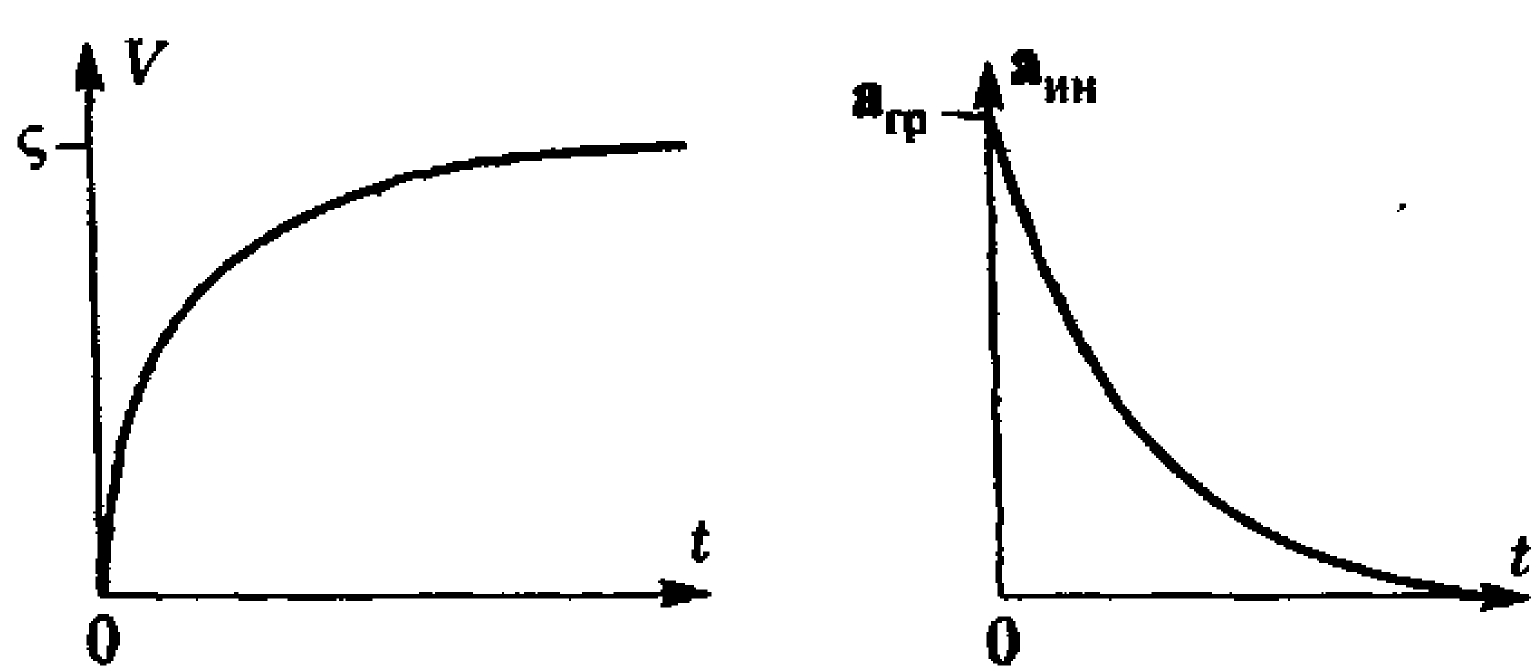

Рис. 2. Зависимости скорости центра инерции массивной частицы и его инерциального ускорения от времени.

---

[2] Полезно сравнить это соотношение с аналогичным для случая электрического поля: $\frac{d\vec{P}}{dt} = q \cdot \vec{\mathcal{E}}$ (здесь q — электрический заряд частицы, $\vec{\mathcal{E}}$ — напряженность поля, $\vec{P}$ — импульс центра инерции заряженной частицы).

Поскольку $V = \frac{P}{m} = \varsigma \cdot \mathrm{th}\left(\frac{\mathbf{a}_{гр} \cdot t}{\varsigma}\right)$, оказывается, что $\lim\limits_{t\to 0} V = \lim\limits_{t\to 0} (\mathbf{a}_{гр} \cdot t) = 0$; $\lim\limits_{t\to\infty} V = \varsigma$.

При всем том, быстрота изменения скорости (логично назвать эту величину ***инерциальным*** ускорением) равна

$$\frac{d\vec{V}}{dt} \equiv \vec{\mathbf{a}}_{ин} = \frac{\vec{\mathbf{a}}_{гр}}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{\mathbf{a}_{гр} \cdot t}{\varsigma}\right)} \longrightarrow \begin{cases} \vec{\mathbf{a}}_{гр} & \text{при } t \to 0; \\ 0 & \text{при } t \to \infty. \end{cases}$$

На рис. 2 представлены зависимости $V(t)$ и $\mathbf{a}_{ин}(t)$.

Что касается безмассовой частицы, то в рассматриваемой ситуации (считая, правда, что $P(t = 0) \neq 0$):

$$P(t) = P(t = 0) \cdot \exp\left\{\frac{\mathbf{a}_{гр} \cdot t}{\varsigma}\right\};$$

$$m(t) = \frac{P(t = 0)}{\varsigma} \cdot \exp\left\{\frac{\mathbf{a}_{гр} \cdot t}{\varsigma}\right\};$$

$$V = \varsigma.$$

Приложение 4

Формула Эйнштейна и уравнение Дирака

Это Приложение адресовано читателю, достаточно хорошо знакомому с основами квантовой механики. Речь пойдет о соответствии модифицированной формулы Эйнштейна дираковскому уравнению состояния точечной частицы. Правда, все изложенное ниже приведено в расчете на согласие читателя считать основополагающей не формулу

$$E = \sqrt{\varsigma^2 \cdot \vec{P}^2 + m_0^2 \cdot \varsigma^4}, \tag{1}$$

а именно модифицированную формулу

$$E = \sqrt{\left\langle \left(\vec{u} \cdot \langle \vec{P} \rangle_{\Delta t_0} \right)^2 \right\rangle_{\Delta t} + m_0^2 \cdot \left\langle \left(\vec{u} \cdot \langle \vec{u}_0 \rangle_{\Delta t_0} \right)^2 \right\rangle_{\Delta t}}\ {}^{1)}. \tag{2, а}$$

При этом, как было показано в § 7.5, если промежуток времени усреднения Δt достаточно велик[2], то

$$\left\langle \left(\vec{u} \cdot \langle \vec{P} \rangle_{\Delta t_0} \right)^2 \right\rangle_{\Delta t} = \left\langle u_x^2 \right\rangle_{\Delta t} \cdot P_x^2 + \left\langle u_y^2 \right\rangle_{\Delta t} \cdot P_y^2 + \left\langle u_z^2 \right\rangle_{\Delta t} \cdot P_z^2; \tag{3, а}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\vec{u} \cdot \langle \vec{u}_0 \rangle_{\Delta t_0} \right)^2 \right\rangle_{\Delta t} &= \left\langle u_x^2 \cdot \langle u_{0,x} \rangle_{\Delta t_0}^2 \right\rangle_{\Delta t} + \left\langle u_y^2 \cdot \langle u_{0,y} \rangle_{\Delta t_0}^2 \right\rangle_{\Delta t} + \\ &+ \left\langle u_z^2 \cdot \langle u_{0,z} \rangle_{\Delta t_0}^2 \right\rangle_{\Delta t}, \end{aligned} \tag{3, б}$$

причем

$$\left\langle u_x^2 \right\rangle_{\Delta t} = \left\langle u_y^2 \right\rangle_{\Delta t} = \left\langle u_z^2 \right\rangle_{\Delta t} = \varsigma^2; \tag{4, а}$$

$$\left\langle u_x^2 \cdot \langle u_{0,x} \rangle_{\Delta t_0}^2 \right\rangle_{\Delta t} = \left\langle u_y^2 \cdot \langle u_{0,y} \rangle_{\Delta t_0}^2 \right\rangle_{\Delta t} = \left\langle u_z^2 \cdot \langle u_{0,z} \rangle_{\Delta t_0}^2 \right\rangle_{\Delta t} = \frac{\varsigma^4}{3}. \tag{4, б}$$

---

[1] Напомню, что формула (2, а) «возникла» в результате вынужденного перехода к статистическому способу описания состояния точечной частицы еще в рамках доквантовой механики. В свою очередь, такой способ потребовался потому, что частицу решено было считать свободной, но, несмотря на это, вращающейся по собственной орбите.

[2] Величина Δt должна удовлетворять неравенству $\Delta t > \Delta t_{мин}$. Если центр инерции, например, электрона (или позитрона) относительно наблюдателя покоится, то $\Delta t_{мин} \approx 10^{-20}$ *с*, а если движется, то $\Delta t_{мин}$ еще меньше. Вполне разумно считать, что импульс центра инерции частицы не успевает измениться за столь короткое время, если ситуация не является очень уж экзотичной.

Но тогда соотношение (2, а) переходит в (1), и, естественно, возникает вопрос: для каких целей соотношение (2, а) можно использовать сегодня? Вот в этой связи и стоит вспомнить знаменитое уравнение Дирака

$$i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \varsigma \cdot \left(\hat{\vec{\alpha}} \hat{\vec{P}} + m_0 \cdot \varsigma \cdot \hat{\beta} \right) \Psi \text{ [3]}, \tag{5}$$

обратив особое внимание на то, что, хотя оно было не выведено, а *постулировано*, поступить так Дирак был просто вынужден. Дело обстояло следующим образом.

Согласно одному из основополагающих постулатов квантовой механики — принципу соответствия, — любому математическому соотношению между физическими характеристиками должно соответствовать такое же соотношение между их операторами.

Явный вид операторы приобретают в выбранном *«представлении»* (термин из квантовой механики). В так называемом пространственно-временнóм представлении операторы полной энергии ($\hat{E}$) и импульса ($\hat{\vec{P}}$) выглядят следующим образом:

$$\hat{E} = i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial}{\partial t}; \quad \hat{\vec{P}} = -i \cdot \hbar \cdot \left(\vec{e}_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Если исходить из соотношения (1), в котором величины ς и m_0 являются универсальными константами, то, согласно принципу соответствия, уравнение состояния свободной точечной частицы должно выглядеть в символическом виде вот так:

$$\hat{E}\Psi = \left(\varsigma \cdot \sqrt{\hat{\vec{P}}^2 + m_0^2 \cdot \varsigma^2} \right) \Psi, \tag{6, а}$$

а в явном виде:

$$i \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(\varsigma \cdot \sqrt{\left(\frac{m_0 \cdot \varsigma}{\hbar} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)} \right) \Psi. \tag{6, б}$$

Здесь $\Psi \equiv \Psi(x, y, z, t)$ — функция состояния — искомая неизвестная, которую и нужно найти, решив уравнение с соответствующими начальным и граничными условиями.

Однако очевидно, что, в отличие от, например, операции

$$\sqrt{\left(\frac{m_0 \cdot \varsigma}{\hbar} \right)^2 \cdot \Psi - \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right)},$$

[3] «Крышечка» символизирует, что помеченная величина является оператором.

операция

$$\left(\sqrt{\left(\frac{m_0\cdot\varsigma}{\hbar}\right)^2-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)}\right)\Psi$$

математически бессодержательна. Вот это, на мой взгляд, и есть истинная причина, вынудившая Дирака отказаться от уравнений (6). Однако в предложенное им уравнение (5) Дираку пришлось ввести два оператора $\widehat{\vec{\alpha}}$ и $\widehat{\beta}$, которым он ***не поставил в соответствие никаких физических характеристик частицы***[4]. Тем не менее, ***математическими*** свойствами наделить эти операторы, разумеется, было необходимо. Поэтому Дирак за соответствием все же обратился: между соотношением $E^2=\varsigma^2\cdot\vec{P}^2+m_0^2\cdot\varsigma^4$ и уравнением $\widehat{E}^2\Psi=\left(\varsigma^2\cdot\widehat{\vec{P}}^2+m_0^2\cdot\varsigma^4\right)\Psi$, которое после подстановки операторов в явном виде стало выглядеть следующим образом:

$$\left(\frac{1}{\varsigma^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\left(\frac{m_0\cdot\varsigma}{\hbar}\right)^2\right)\Psi=0.$$

Представив свое уравнение (5) в виде

$$\left(\frac{1}{\varsigma}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\Psi=\left(\frac{\widehat{\vec{\alpha}}\widehat{\vec{P}}}{i\cdot\hbar}+\frac{m_0\cdot\varsigma}{i\cdot\hbar}\cdot\widehat{\beta}\right)^2\Psi=0,$$

Дирак приравнял операторы:

$$\left(\frac{1}{\varsigma}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\right)^2=\frac{1}{\varsigma^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\begin{cases}-\left(\dfrac{\widehat{\vec{\alpha}}\widehat{\vec{P}}}{\hbar}+\dfrac{m_0\cdot\varsigma}{\hbar}\cdot\widehat{\beta}\right)^2,\\[2ex] \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}-\left(\dfrac{m_0\cdot\varsigma}{\hbar}\right)^2.\end{cases}$$

В результате он установил все необходимые для работы свойства операторов $\widehat{\vec{\alpha}}$ и $\widehat{\beta}$. Однако подобному способу, несмотря на его всеобщее одобрение, присущ принципиальный порок. Дело в том, что ***только лишь придание операторам математических свойств вовсе не является основанием считать уравнение состояния с участием этих операторов адекватно отражающим физическую реальность.*** Попросту

[4] Мало того, ясно видно, что никакого соответствия нет и между соотношением (1) и уравнением (5). Именно это обстоятельство дало повод к ставшему общепринятым утверждению, что *«уравнение Дирака не подчиняется принципу соответствия»*.

говоря, раз операторам с самого начала не поставлены в соответствие физические характеристики, то сами операторы — не более чем абстрактные математические величины, а само уравнение — не более чем чисто математическое уравнение. А никакое подобное уравнение, равно как и соотношение, не обязано заведомо допускать физически содержательную интерпретацию.

Разумеется, сказанное выше не делает уравнение Дирака ни на микрон менее выдающимся достижением, чем это давно и обще признано. Слишком много открытий обязано гениальной интуиции, чтобы признать ее подсудной.

Все же впоследствии было доказано[5], что уравнение Дирака можно и нужно именно вывести, причем пользуясь именно принципом соответствия. Однако сделать это удается, только обратившись к соотношению (2, а).

В этом Приложении будет доказано, что введенный Дираком оператор $\hat{\vec{\alpha}}$ на самом деле является оператором «обезразмеренной» скорости $\vec{u}$ $\left(\hat{\vec{\alpha}} = \frac{1}{\varsigma} \cdot \hat{\vec{u}}\right)$, а оператор $\hat{\beta}$ — произведением оператора $\hat{\vec{\alpha}}$ на оператор «обезразмеренной» скорости $\langle\vec{u}_0\rangle_{\Delta t_0}$, то есть $\left(\hat{\beta} = \frac{1}{\varsigma^2} \cdot \hat{\vec{u}}\,\widehat{\langle\vec{u}_0\rangle}_{\Delta t_0}\right)$. Ведь, согласно принципу соответствия, соотношения между операторами физических характеристик просто обязаны совпадать с соотношениями между самими характеристиками.

Сначала целесообразно вспомнить принятые в § 7.5 обозначения: $\vec{\alpha} \equiv \frac{\vec{u}}{\varsigma}$; $\vec{\mu} \equiv \frac{\langle\vec{u}_0\rangle_{\Delta t_0}}{\varsigma}$; $\beta \equiv \vec{\alpha} \cdot \vec{\mu}$, причем вспомнить также, что $\vec{\alpha}, \vec{\mu}, \beta$ считаются зависящими от времени даже в промежутке Δt. С учетом равенств (3, а, б) соотношению (2, а) можно придать вид (в новых обозначениях):

либо

$$E = \varsigma \cdot \sqrt{\left\langle \left(\vec{\alpha} \cdot \langle\vec{P}\rangle_{\Delta t_0}\right)^2 \right\rangle_{\Delta t} + m_0^2 \cdot \varsigma^2 \cdot \left\langle (\vec{\alpha} \cdot \vec{\mu})^2 \right\rangle_{\Delta t}}, \qquad (2, б)$$

либо

$$E = \varsigma \cdot \sqrt{\left\langle \left(\vec{\alpha} \cdot \langle\vec{P}\rangle_{\Delta t_0}\right)^2 \right\rangle_{\Delta t} + m_0^2 \cdot \varsigma^2 \cdot \langle\beta^2\rangle_{\Delta t}}. \qquad (2, в)$$

[5] См. *Вильф Ф. Ж.* Еще раз о спине точечной частицы, формуле Эйнштейна и релятивистском уравнении Дирака. М.: УРСС, 2000.

Равенства (3, а), (3, б) признаются справедливыми, поскольку в § 7.5 было установлено, что (в новых обозначениях)

$$\langle \alpha_x \cdot \alpha_y \rangle_{\Delta t} + \langle \alpha_y \cdot \alpha_x \rangle_{\Delta t} = 0; \tag{7, а}$$

$$\langle \alpha_y \cdot \alpha_z \rangle_{\Delta t} + \langle \alpha_z \cdot \alpha_y \rangle_{\Delta t} = 0; \tag{7, б}$$

$$\langle \alpha_z \cdot \alpha_x \rangle_{\Delta t} + \langle \alpha_x \cdot \alpha_z \rangle_{\Delta t} = 0; \tag{7, в}$$

$$\langle \alpha_x \cdot \mu_x \cdot \alpha_y \cdot \mu_y \rangle_{\Delta t} + \langle \alpha_y \cdot \mu_y \cdot \alpha_x \cdot \mu_x \rangle_{\Delta t} = 0; \tag{7, г}$$

$$\langle \alpha_y \cdot \mu_y \cdot \alpha_z \cdot \mu_z \rangle_{\Delta t} + \langle \alpha_z \cdot \mu_z \cdot \alpha_y \cdot \mu_y \rangle_{\Delta t} = 0; \tag{7, д}$$

$$\langle \alpha_z \cdot \mu_z \cdot \alpha_x \cdot \mu_x \rangle_{\Delta t} + \langle \alpha_x \cdot \mu_x \cdot \alpha_z \cdot \mu_z \rangle_{\Delta t} = 0. \tag{7, е}$$

Теперь открывается возможность снять в соотношениях (2, б,в) косые скобки. В самом деле, считая по-прежнему импульс $\vec{P}$ не зависящим от t в промежутке Δt и учитывая, что величины u_x^2, u_y^2, u_y^2, $\langle u_{0,x} \rangle_{\Delta t_0}^2$, $\langle u_{0,y} \rangle_{\Delta t_0}^2$, $\langle u_{0,z} \rangle_{\Delta t_0}^2$ не зависят от t в промежутке Δt ($\Delta t_0 \ll \Delta t$), скобки $\langle\ \rangle_{\Delta t}$, символизирующие усреднение по времени, можно снять в *правых* частях выражений (3) и (4). Далее, ничто не мешает принять ***специальное условие — снять косые скобки в выражениях (7)***, написав (по-прежнему в новых обозначениях)

$$\alpha_x \cdot \alpha_y + \alpha_y \cdot \alpha_x = 0; \tag{8, а}$$

$$\alpha_y \cdot \alpha_z + \alpha_z \cdot \alpha_y = 0; \tag{8, б}$$

$$\alpha_z \cdot \alpha_x + \alpha_x \cdot \alpha_z = 0; \tag{8, в}$$

$$\alpha_x \cdot \mu_x \cdot \alpha_y \cdot \mu_y + \alpha_y \cdot \mu_y \cdot \alpha_x \cdot \mu_x = 0; \tag{8, г}$$

$$\alpha_y \cdot \mu_y \cdot \alpha_z \cdot \mu_z + \alpha_z \cdot \mu_z \cdot \alpha_y \cdot \mu_y = 0; \tag{8, д}$$

$$\alpha_z \cdot \mu_z \cdot \alpha_x \cdot \mu_x + \alpha_x \cdot \mu_x \cdot \alpha_z \cdot \mu_z = 0. \tag{8, е}$$

Тогда косые скобки можно снять и в левых частях выражений (3) и (4), поскольку с учетом принятых равенств (8)

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{P})^2 = \alpha_x^2 \cdot P_x^2 + \alpha_y^2 \cdot P_y^2 + \alpha_z^2 \cdot P_z^2;$$
$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{\mu})^2 = \alpha_x^2 \cdot \mu_x^2 + \alpha_y^2 \cdot \mu_y^2 + \alpha_z^2 \cdot \mu_z^2.$$

Итак, отныне

$$\left\langle \left(\vec{\alpha} \cdot \langle \vec{P} \rangle_{\Delta t_0} \right)^2 \right\rangle_{\Delta t} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{P})^2, \tag{9, а}$$

$$\left\langle (\vec{\alpha} \cdot \vec{\mu})^2 \right\rangle_{\Delta t} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\mu})^2 = \beta^2. \tag{9, б}$$

В результате соотношения (2, б, в) можно представить в менее громоздком виде:

$$E = \begin{cases} \varsigma \cdot \sqrt{\left(\vec{\alpha} \cdot \vec{P}\right)^2 + m_0^2 \cdot \varsigma^2 \cdot (\vec{\alpha} \cdot \vec{\mu})^2}; & (10,\text{а}) \\ \varsigma \cdot \sqrt{\left(\vec{\alpha} \cdot \vec{P}\right)^2 + m_0^2 \cdot \varsigma^2 \cdot \beta^2}. & (10,\text{б}) \end{cases}$$

Теперь, согласно принципу соответствия, нужно преобразовать эти соотношения в операторные уравнения в виде

$$i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \begin{cases} \left(\varsigma \cdot \sqrt{\left(\widehat{\vec{\alpha}}\widehat{\vec{P}}\right)^2 + m_0^2 \cdot \varsigma^2 \cdot \left(\widehat{\vec{\alpha}}\,\widehat{\vec{\mu}}\right)^2}\right)\Psi; & (11,\text{а}) \\ \left(\varsigma \cdot \sqrt{\left(\widehat{\vec{\alpha}}\widehat{\vec{P}}\right)^2 + m_0^2 \cdot \varsigma^2 \cdot \widehat{\beta}^2}\right)\Psi. & (11,\text{б}) \end{cases}$$

Здесь, напомню,

$$\widehat{E} = i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial}{\partial t}; \quad \widehat{\vec{P}} = -i \cdot \hbar \cdot \left(\vec{e}_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \cdot \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Далее нужно выяснить, допустимо ли считать уравнения (11) выраженными в *явном* виде. Ответ таков: как будто нет, поскольку, хотя два оператора ($\widehat{E}$ и $\widehat{\vec{P}}$) выражены явно, еще не все свойства операторов $\widehat{\vec{\alpha}}$ и $\widehat{\beta}$ (или $\widehat{\vec{\alpha}}$ и $\widehat{\vec{\mu}}$) установлены. Тем не менее ряд свойств можно считать установленным, поскольку, согласно принципу соответствия, в соотношениях (8) достаточно поставить над каждой величиной крышечку, чтобы эти соотношения между физическим характеристиками превратились в соотношения между их операторами. Кроме того, оператор $\widehat{\vec{P}}$ коммутирует и с оператором $\widehat{\vec{\alpha}}$, и с оператором $\widehat{\beta}$ $\left(\widehat{\vec{P}}\widehat{\vec{\alpha}} - \widehat{\vec{\alpha}}\widehat{\vec{P}} = 0;\ \widehat{\vec{P}}\widehat{\beta} - \widehat{\vec{P}}\widehat{\beta} = 0\right)$, так как оператор $\widehat{\vec{P}}$ не действует на те аргументы Ψ-функции, на которые действуют операторы $\widehat{\vec{\alpha}}$ и $\widehat{\beta}$. Еще ряд свойств следует считать установленным, поскольку в нашем распоряжении имеются инварианты лоренцевой группы формул преобразования физических характеристик и сами эти формулы (см. с. 37, 77, 78). В них также достаточно поставить крышечки над всеми величинами кроме, конечно, η и ν_0, чтобы получить соотношения между операторами:

$$\widehat{\alpha}_x^2 = \widehat{\alpha}_y^2 = \widehat{\alpha}_z^2 = \mathrm{Inv}_1 = 1; \tag{12}$$

$$\widehat{\mu}_x^2 = \widehat{\mu}_y^2 = \widehat{\mu}_z^2 = \mathrm{Inv}_2 = \frac{1}{3}; \tag{13}$$

$$\widehat{\beta}^2 = \mathrm{Inv}_3 = 1; \tag{14}$$

$$\widehat{\alpha}_x\widehat{\mu}_x\widehat{\alpha}_x\widehat{\mu}_x = \widehat{\alpha}_y\widehat{\mu}_y\widehat{\alpha}_y\widehat{\mu}_y = \widehat{\alpha}_z\widehat{\mu}_z\widehat{\alpha}_z\widehat{\mu}_z = \mathrm{Inv}_4; \tag{15}$$

$$\widehat{\alpha}_{j,x} = \widehat{\alpha}_{k,x}; \tag{16, а}$$

$$\widehat{\alpha}_{j,y} = \eta\cdot\left(1+\nu_0\cdot\widehat{\alpha}_{k,x}\right)\widehat{\alpha}_{k,y}; \tag{16, б}$$

$$\widehat{\alpha}_{j,z} = \eta\cdot\left(1+\nu_0\cdot\widehat{\alpha}_{k,x}\right)\widehat{\alpha}_{k,z}; \tag{16, в}$$

$$\widehat{\mu}_{j,x} = \eta\cdot\left(1+\nu_0\cdot\widehat{\alpha}_{k,x}\right)\widehat{\mu}_{k,x}; \tag{17, а}$$

$$\widehat{\mu}_{j,y} = \widehat{\mu}_{k,y}; \tag{17, б}$$

$$\widehat{\mu}_{j,z} = \widehat{\mu}_{k,z}; \tag{17, в}$$

$$\widehat{\beta}_j = \eta\cdot\left(1+\nu_0\cdot\widehat{\alpha}_{k,x}\right)\widehat{\beta}_k. \tag{18}$$

Тем не менее, отсутствуют соотношения между следующими операторами: $\widehat{\alpha}_x$ и $\widehat{\mu}_z$; $\widehat{\alpha}_x$ и $\widehat{\mu}_y$; $\widehat{\alpha}_z$ и $\widehat{\mu}_x$ (и т. п.); $\widehat{\mu}_x$ и $\widehat{\mu}_y$; $\widehat{\mu}_y$ и $\widehat{\mu}_z$; $\widehat{\mu}_z$ и $\widehat{\mu}_x$ (или между операторами $\widehat{\alpha}_x$ и $\widehat{\beta}$; $\widehat{\alpha}_y$ и $\widehat{\beta}$; $\widehat{\alpha}_z$ и $\widehat{\beta}$).

Теперь я постараюсь показать, что все недостающие соотношения однозначно следуют из тех, которые уже имеются в нашем распоряжении[6].

Рассмотрим сначала два соотношения:

$$\widehat{\alpha}_x^2 = \mathrm{Inv}_1; \tag{12}$$

$$\widehat{\alpha}_x\widehat{\mu}_x\widehat{\alpha}_x\widehat{\mu}_x = \mathrm{Inv}_4. \tag{15}$$

Из последнего следует равенство

$$\widehat{\alpha}_{k,x}\widehat{\mu}_{k,x}\widehat{\alpha}_{k,x}\widehat{\mu}_{k,x} = \widehat{\alpha}_{j,x}\widehat{\mu}_{j,x}\widehat{\alpha}_{j,x}\widehat{\mu}_{j,x}.$$

Используя формулы преобразования j-операторов в k-операторы, получаем

$$\widehat{\alpha}_{k,x}\widehat{\mu}_{k,x}\widehat{\alpha}_{k,x}\widehat{\mu}_{k,x} = \eta^2\cdot\widehat{\alpha}_{k,x}\left\{\left(\widehat{\mu}_{k,x}\widehat{\alpha}_{k,x}+\nu_0^2\cdot\widehat{\alpha}_{k,x}\widehat{\mu}_{k,x}\widehat{\alpha}_{k,x}^2\right)+\right.$$
$$\left.+\nu_0\cdot\left(\widehat{\alpha}_{k,x}\widehat{\mu}_{k,x}\widehat{\alpha}_{k,x}+\widehat{\mu}_{k,x}\widehat{\alpha}_{k,x}^2\right)\right\}\widehat{\mu}_{k,x}.$$

---

[6] Попутно можно было бы проверить, не противоречат ли друг другу различные, *независимо* обоснованные соотношения между операторами. Вот пример оценки согласованности соотношений (8, а)(после постановки в нем крышечек), (12) и (16, б):

$$\widehat{\alpha}_{j,y}^2 = \begin{cases} \widehat{\alpha}_{k,y}^2 = \widehat{\alpha}_{k,x}^2 = \mathrm{Inv}, \\ \eta^2\cdot\left(\widehat{\alpha}_{k,y}+\nu_0\cdot\widehat{\alpha}_{k,x}\widehat{\alpha}_{k,y}\right)\left(\widehat{\alpha}_{k,y}+\nu_0\cdot\widehat{\alpha}_{k,x}\widehat{\alpha}_{k,y}\right), \end{cases}$$

откуда следует, что

$$\widehat{\alpha}_y^2 = \eta^2\cdot\left(\widehat{\alpha}_y+\nu_0^2\cdot\widehat{\alpha}_x\widehat{\alpha}_y\widehat{\alpha}_x\right)\widehat{\alpha}_y+\eta^2\cdot\nu_0\cdot\left(\widehat{\alpha}_y\widehat{\alpha}_x+\widehat{\alpha}_x\widehat{\alpha}_y\right)\widehat{\alpha}_y.$$

Это равенство обращается в тождество $\widehat{\alpha}_y^2 \equiv \widehat{\alpha}_y^2$ только при двух условиях: $\widehat{\alpha}_x^2 = 1$; $\widehat{\alpha}_y\widehat{\alpha}_x+\widehat{\alpha}_x\widehat{\alpha}_y = 0$ (напомню, что $\eta^2\cdot\left(1-\nu_0^2\right) = 1$).

Это равенство обращается в тождество

$$\widehat{\alpha}_{k,x}\widehat{\mu}_{k,x}\widehat{\alpha}_{k,x}\widehat{\mu}_{k,x} \equiv \widehat{\alpha}_{k,x}\widehat{\mu}_{k,x}\widehat{\alpha}_{k,x}\widehat{\mu}_{k,x},$$

во-первых, если $\widehat{\alpha}^2_{k,x} = 1$; (см. ф-лу (12)), во-вторых, если

$$\widehat{\alpha}_x\widehat{\mu}_x + \widehat{\mu}_x\widehat{\alpha}_x = \operatorname{Inv}_5 = 0. \qquad (19,\text{а})$$

Далее, используя равенство (19, а) и учитывая, что

$$\widehat{\mu}^2_x = \widehat{\mu}^2_y = \operatorname{Inv}_2; \quad \widehat{\alpha}_x\widehat{\mu}_x\widehat{\alpha}_x\widehat{\mu}_x = \widehat{\alpha}_y\widehat{\mu}_y\widehat{\alpha}_y\widehat{\mu}_y = \operatorname{Inv}_4,$$

находим, что

$$\widehat{\alpha}_x\widehat{\mu}_x\widehat{\alpha}_x\widehat{\mu}_x = \begin{cases} -\widehat{\mu}^2_x = -\widehat{\mu}^2_y; \\ \widehat{\alpha}_y\widehat{\mu}_y\widehat{\alpha}_y\widehat{\mu}_y, \end{cases}$$

откуда следует, что $-\widehat{\mu}^2_y = \widehat{\alpha}_y\widehat{\mu}_y\widehat{\alpha}_y\widehat{\mu}_y$. Отсюда при использовании равенства (12) следует, в свою очередь, соотношение

$$\widehat{\alpha}_y\widehat{\mu}_y + \widehat{\mu}_y\widehat{\alpha}_y = \operatorname{Inv}_5 = 0. \qquad (19,\text{б})$$

Действуя совершенно аналогичным образом, приходим к соотношению

$$\widehat{\alpha}_z\widehat{\mu}_z + \widehat{\mu}_z\widehat{\alpha}_z = \operatorname{Inv}_5 = 0. \qquad (19,\text{в})$$

Соотношения (19), разумеется, можно получить и другим способом. Это же касается и оставшихся соотношений. Поэтому я приведу еще только один пример.

Рассмотрев равенство

$$\widehat{\alpha}_{k,y}\widehat{\mu}_{k,y}\widehat{\alpha}_{k,y}\widehat{\mu}_{k,y} = \widehat{\alpha}_{j,y}\widehat{\mu}_{j,y}\widehat{\alpha}_{j,y}\widehat{\mu}_{j,y} = \operatorname{Inv}_4 \qquad (15)$$

и выразив в нем j-операторы через k-операторы, получим

$$\widehat{\alpha}_{k,y}\widehat{\mu}_{k,y}\widehat{\alpha}_{k,y}\widehat{\mu}_{k,y} = \eta^2 \cdot \Big\{ \Big(\widehat{\alpha}_{k,y}\widehat{\mu}_{k,y} + \nu_0^2 \cdot \widehat{\alpha}_{k,x}\widehat{\alpha}_{k,y}\widehat{\mu}_{k,y}\widehat{\alpha}_{k,x}\Big) + \\ + \Big(\widehat{\alpha}_{k,y}\widehat{\mu}_{k,y}\widehat{\alpha}_{k,x} + \widehat{\alpha}_{k,x}\widehat{\alpha}_{k,y}\widehat{\mu}_{k,y}\Big)\Big\}\, \widehat{\alpha}_{k,y}\widehat{\mu}_{k,y}.$$

С учетом уже установленного соотношения (8, а) (после постановки в нем крышечек) получаем

$$\widehat{\alpha}_{k,y}\widehat{\mu}_{k,y}\widehat{\alpha}_{k,y}\widehat{\mu}_{k,y} = \eta^2 \cdot \Big\{ \Big(\widehat{\alpha}_{k,y}\widehat{\mu}_{k,y} - \nu_0^2 \cdot \widehat{\alpha}_{k,y}\widehat{\alpha}_{k,x}\widehat{\mu}_{k,y}\widehat{\alpha}_{k,x}\Big) + \\ + \nu_0 \cdot \widehat{\alpha}_{k,y}\left(\widehat{\mu}_{k,y}\widehat{\alpha}_{k,x} - \widehat{\alpha}_{k,x}\widehat{\mu}_{k,y}\right)\Big\}\, \widehat{\alpha}_{k,y}\widehat{\mu}_{k,y}.$$

Это равенство обращается в тождество, если

$$\widehat{\alpha}_x\widehat{\mu}_y - \widehat{\mu}_y\widehat{\alpha}_x = \mathrm{Inv}_6 = 0.$$

Чтобы не утомлять читателя, я не стану выводить остальные соотношения, а лишь приведу результаты вывода, придав им форму таблицы:

$$\begin{array}{lll} \widehat{\alpha}_x\widehat{\mu}_x + \widehat{\mu}_x\widehat{\alpha}_x = 0; & \widehat{\alpha}_x\widehat{\mu}_y - \widehat{\mu}_y\widehat{\alpha}_x = 0; & \widehat{\alpha}_x\widehat{\mu}_z - \widehat{\mu}_z\widehat{\alpha}_x = 0; \\ \widehat{\alpha}_y\widehat{\mu}_x - \widehat{\mu}_x\widehat{\alpha}_y = 0; & \widehat{\alpha}_y\widehat{\mu}_y + \widehat{\mu}_y\widehat{\alpha}_y = 0; & \widehat{\alpha}_y\widehat{\mu}_z - \widehat{\mu}_z\widehat{\alpha}_y = 0; \\ \widehat{\alpha}_z\widehat{\mu}_x - \widehat{\mu}_x\widehat{\alpha}_z = 0; & \widehat{\alpha}_z\widehat{\mu}_y - \widehat{\mu}_y\widehat{\alpha}_z = 0; & \widehat{\alpha}_z\widehat{\mu}_z + \widehat{\mu}_z\widehat{\alpha}_z = 0. \end{array}$$

Из соотношений (8) (после постановки в них крышечек) и этой таблицы следует, что

$$\widehat{\mu}_x\widehat{\mu}_y - \widehat{\mu}_y\widehat{\mu}_x = \widehat{\mu}_y\widehat{\mu}_z - \widehat{\mu}_z\widehat{\mu}_y = \widehat{\mu}_z\widehat{\mu}_x - \widehat{\mu}_x\widehat{\mu}_z = 0; \tag{20}$$

$$\widehat{\alpha}_x\widehat{\beta} + \widehat{\beta}\widehat{\alpha}_x = \widehat{\alpha}_y\widehat{\beta} + \widehat{\beta}\widehat{\alpha}_y = \widehat{\alpha}_z\widehat{\beta} + \widehat{\beta}\widehat{\alpha}_z = 0 \tag{21}$$

(напомню, что $\widehat{\beta} \equiv \widehat{\vec{\alpha}}\widehat{\vec{\mu}}$).

Теперь, после того, как установлены все свойства всех операторов, можно получить еще одно соотношение, весьма существенное для построения уравнения состояния свободной точечной частицы.

Принимая во внимание, что из соотношений (21) следует равенство $\widehat{\vec{\alpha}}\widehat{\beta} + \widehat{\beta}\widehat{\vec{\alpha}} = 0$, что операторы $\widehat{\vec{\alpha}}$ и $\widehat{\vec{P}}$, $\widehat{\beta}$ и $\widehat{\vec{P}}$ коммутируют друг с другом, приходим к следующему результату:

$$\left(\widehat{\vec{\alpha}}\widehat{\vec{P}}\right)^2 + \left(m_0 \cdot \varsigma \cdot \widehat{\beta}\right)^2 = \left(\widehat{\vec{\alpha}}\widehat{\vec{P}} + m_0 \cdot \varsigma \cdot \widehat{\beta}\right)^2. \tag{22}$$

Вот теперь, наконец, с полным основанием можно написать

$$i \cdot \hbar \cdot \frac{d\Psi}{dt} = \varsigma \cdot \left(\sqrt{\left(\widehat{\vec{\alpha}}\widehat{\vec{P}}\right)^2 + \left(m_0 \cdot \varsigma \cdot \widehat{\beta}\right)^2}\right)\Psi = \varsigma \cdot \left(\widehat{\vec{\alpha}}\widehat{\vec{P}} + m_0 \cdot \varsigma \cdot \widehat{\beta}\right)\Psi.$$

Как видим, ***уравнение Дирака, вопреки традиционной точке зрения, совершенно строго выводится из доквантового релятивистского соотношения в полном согласии с принципом соответствия.***

В заключение — еще один факт, заслуживающий, как мне думается, внимания читателя.

В § 7.4 было показано, что

$$\langle \vec{u} \rangle_{\Delta t} = \frac{\vec{P}}{m(P)} = \vec{V}, \tag{23}$$

где $\vec{P}$ и $\vec{V}$ — импульс и скорость центра инерции точечной частицы.

Давайте теперь обратимся к примеру, который обычно рассматривают в учебных пособиях по квантовой механике. Положим

$$\widehat{\vec{P}} = \vec{e}_x \cdot \widehat{P}_x; \quad \widehat{P}_y = \widehat{P}_z = 0;$$

$$\widehat{\alpha}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \widehat{\alpha}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \widehat{\alpha}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае Ψ-функция состояния свободной точечной частицы и комплексно сопряженная ей функция имеют вид:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} \cdot \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ \sigma \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \exp\left\{\frac{i \cdot (P_x \cdot x - E \cdot t)}{\hbar}\right\};$$

$$\Psi^* = \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} \cdot (\rho \, 0 \, \sigma \, 0) \cdot \exp\left\{-\frac{i \cdot (P_x \cdot x - E \cdot t)}{\hbar}\right\}.$$

Здесь $\Delta x = \lim\limits_{x \to \infty} 2x$; $\rho^2 + \sigma^2 = 1$; $\rho \cdot \sigma = \dfrac{P_x}{2m \cdot \varsigma} = \dfrac{V_x}{2 \cdot \varsigma}$.

Нетрудно проверить, что при этом, как и требуется,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi \cdot \Psi^* \cdot dx = 1; \quad E^2 = \varsigma^2 \cdot P_x^2 + m_0^2 \cdot \varsigma^4.$$

Исходя из выражения (23) и условия $\widehat{P}_y = \widehat{P}_z = 0$, следовало бы ожидать, что

$$\langle \widehat{\alpha}_x \rangle_{\Delta t} = \frac{V_x}{\varsigma}; \quad \langle \widehat{\alpha}_y \rangle_{\Delta t} = 0; \quad \langle \widehat{\alpha}_z \rangle_{\Delta t} = 0\,[7].$$

Выясним, так ли это.

По определению

$$\langle \widehat{\alpha}_x \rangle_{\Delta t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi \cdot \widehat{\alpha}_x \Psi^* \cdot dx \cdot \text{ и т. п.} \tag{24}$$

[7] Одно из требований к математической структуре квантовой механики состоит в следующем: среднее по времени значение оператора физической характеристики должно быть таким, чтобы его можно было отождествить со значением самой характеристики.

Подставив в подынтегральные выражения соответствующие величины в явном виде, получим

$$\langle\widehat{\alpha}_x\rangle_{\Delta t} = \frac{V_x}{\varsigma}; \quad \langle\widehat{\alpha}_y\rangle_{\Delta t} = 0; \quad \langle\widehat{\alpha}_z\rangle_{\Delta t} = 0. \tag{25}$$

Разумеется, не случайно оказалось, что

$$\langle\widehat{\alpha}_x\rangle_{\Delta t} = \frac{V_x}{\varsigma}; \quad \langle\widehat{\alpha}_y\rangle_{\Delta t} = \langle\widehat{\alpha}_z\rangle_{\Delta t} = 0,$$

а не как-нибудь иначе. Следует иметь в виду, что представление матричных операторов $\widehat{\alpha}_x, \widehat{\alpha}_y, \widehat{\alpha}_z$ (см. с. 121) и должно быть выбрано таким, чтобы результирующая скорость точечной частицы, будучи усредненной по времени, совпала со скоростью центра инерции частицы.

В связи с формулами (24), (25) хотелось бы обратить внимание читателя на одно важное обстоятельство.

Согласно общепринятой интерпретации квантовой механики, среднее по времени значение оператора, определяемое выражением (24), обязано считаться *измеряемым* значением пусть какой-то, но — *физической* характеристики частицы. Реально измерить характеристику *математическую*, естественно, нельзя. Таким образом, равенства (25), в правых частях которых присутствуют *вещественные* числа (не мнимые и не комплексные), свидетельствуют, что оператор $\widehat{\vec{\alpha}}$, введенный П. Дираком в качестве *чисто математической* величины, на самом деле не может не соответствовать *физической* характеристике. Так оно и есть: оператор $\widehat{\vec{\alpha}}$ соответствует результирующей скорости (лишь удобства ради измеряемой в единицах ς). Равным образом и оператор $\widehat{\vec{\mu}}$ соответствует собственно-орбитальной скорости (также измеряемой в единицах ς).

Что же касается оператора $\widehat{\beta}$, представляющего собой скалярное произведение векторных операторов $\widehat{\vec{\alpha}}$ и $\widehat{\vec{\mu}}$, то использование именно его потому оказалось возможным, что характеристики, представляемые операторами $\widehat{\vec{\alpha}}$ и $\widehat{\vec{\mu}}$, в отличие от импульса центра инерции частицы не зависят от внешних воздействий на частицу[8].

[8] Конечно, использовать один оператор $\widehat{\beta}$ удобнее, чем скалярное произведение двух операторов.

Приложение 5

Спин точечной частицы и «фундаментальные конструкции»

Хотя это Приложение адресовано достаточно эрудированному читателю, все же, по-видимому, целесообразно начать с краткого историко-физического введения.

* * *

К концу 1915 года была практически полностью разработана (главным образом усилиями А. Эйнштейна) теория относительности, названная общей (ОТО). По сути дела, А. Эйнштейном было дано объяснение существования гравитационного поля в бесконечно большом пространстве, окружающем пространственно ограниченный источник поля — гравитационный заряд[1]. Объяснение состояло в отождествлении не обладающего гравитационным зарядом (то есть массой покоя) *материального* континуума (иначе говоря — гравитационного поля) с таким пустым пространством (*математическим* континуумом), которое оказалось бы искривленным[2]. Именно *отождествление пустого* пространства с *материальным* континуумом — полем — и придает понятию *«кривизна пустого (то есть уже непустого) пространства»* физическую содержательность.

Окрыленный экспериментальными подтверждениями выводов из его теории гравитации, А. Эйнштейн решил также доказать, что то, что уже современная ему физика считала точечной частицей, является на самом деле порождением гравитационного и электрического полей.

Хотя более чем за 30 лет крайне напряженного труда А. Эйнштейн не добился никаких успехов в решении поставленной задачи,

---

[1] Таким источником, по крайней мере на этапе становления ОТО, являлся объект, который сейчас следовало бы назвать электронейтральным коллективом точечных частиц, обладающих — каждая — отличными от нуля массой покоя и электрическим зарядом. Согласно «принципу эквивалентности» (основному постулату ОТО), масса частицы отождествляется с ее гравитационным зарядом.

[2] В областях пространства, приближенных к гравитационному заряду, искривление сильнее; в областях удаленных — слабее; в бесконечно удаленных областях пространство вообще неискривленное (пустое).

из так называемой ОТО выросла так называемая классическая геометродинамика, существование которой оправдывается исключительно уверенностью в способности решить в ее рамках поставленную А. Эйнштейном задачу — создать, образно выражаясь, из пространственного континуума, наделенного свойствами материального объекта, частицу, обладающую теми характеристиками-константами (например, электрическим зарядом, массой покоя, спином или только спином), которыми обладают реально существующие частицы (лептоны и кварки).

Хотя продолжающиеся по сей день бесплодные попытки решить «сверхзадачу» физики не ослабили энтузиазма занятых этим специалистов (далее, для краткости, называемых «геометристами»), кое-какие изменения в их взглядах все же произошли. Начиная с конца 50-х годов XX века все надежды на успех связываются с разработкой уже ***квантовой*** геометродинамики, а в том, что ее действительно можно разработать, никто из геометристов не сомневается.

Теперь немного о причинах предыдущих неудач.

Фатальными считаются два обстоятельства:

1. Объекты, которые ***современная*** физика ***обоснованно*** рассматривает как ***точечные*** (лептоны и кварки), в рамках геометродинамики (как доквантовой и существующей, так и квантовой, но еще несуществующей) могут считаться ***только протяженными***. В рамках геометродинамики с ***основополагающими*** представлениями о физической реальности согласуется ***лишь неточечная*** частица.

2. Несмотря на то, что в рамках классической (неквантовой) геометродинамики из пространственного континуума действительно удается «создать» ***пространственно ограниченный*** объем, в котором автоматически оказывается локализованной масса[3], никакими способами не удается «создать» из пространственного континуума спин — такой собственный механический момент, которым обладает реальная частица, к какой бы разновидности лептонов и кварков она ни принадлежала[4].

---

[3] Масса и размеры этого образования (геона) получаются какими угодно вместо того, чтобы быть только такими, какими обладают реальные частицы. Вообще говоря, это неудивительно, ибо масса геона — это не масса покоя, а сгусток энергии — результат умножения объемной плотности энергии на объем и последующего деления на квадрат скорости света. Что же касается электрического заряда, то из электронейтрального континуума возникает, естественно, только электронейтральное образование.

[4] Напомню, что спином назван механический момент, являющийся ***инвариантом лоренцевых преобразований. Такой механический момент — спин — совместим только с точечностью частицы.*** Понятно, поэтому, почему потерпит неудачу любая теория, в рамках которой попытаются совместить спин и ***протяженность*** частицы.

В связи с этим хочу обратить внимание заинтересованного читателя на седьмую главу книги одного из основоположников геометродинамики Д. Уилера «Нейтрино, гравитация

В создавшейся ситуации геометристы вполне логично, как им кажется, посчитали, что все проблемы удастся решить, перейдя к *квантовой* геометродинамике. Однако откуда такая уверенность, коль скоро речь идет о теории, которой еще нет?

Объяснение приводят такое.

В основных соотношениях *классической* геометродинамики присутствуют лишь *две* «мировые» константы: гравитационная постоянная пустого пространства (g_0), равная $\approx 0{,}75 \cdot 10^{18} \left(\frac{эВ \cdot с^4}{см^5}\right)$, и скорость света в пустом пространстве (ς), равная $\approx 3 \cdot 10^{10} \left(\frac{см}{с}\right)$. В основных соотношениях *квантовой* геометродинамики должна, *по определению*, присутствовать еще и *третья* мировая константа — постоянная Планка ($\hbar$), равная $\approx 6 \cdot 10^{-16}$ (эВ · с). А вот уже из трех констант g_0, ς, $\hbar$ можно образовать *«фундаментальную длину»* L_*:

$$L_* \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{24\pi \cdot g_0 \cdot \varsigma^3}}\,^{5)}. \tag{1}$$

Геометристы предлагают длину L_* *заранее* истолковать как «квант пространства»[6]. А поскольку частица и должна «состоять из пространства», ее протяженность не сможет оказаться меньшей L_*. Таким образом, требуемая позарез неточечность лептонов и кварков получает в рамках квантовой геометродинамики естественное объяснение, сводящееся к тому, что иначе и быть не может.

«Квантованному» пространству[7] допустимо приписать не только кривизну, но еще и многосвязность, а если потребуется, то и скрученность (в масштабах, соизмеримых с длиной L_*). Геометристы надеются,

---

и геометрия» (получившей при переводе на русский язык название «Гравитация, нейтрино и Вселенная»). Эта глава содержит менее трех страниц и выделенные слова: «Нынешняя геометродинамика имеет следующий очевидный недостаток: *она не может включить естественным образом частицы спина* $\frac{1}{2}$ *вообще и нейтрино в частности.*» Это было написано в 1959 году, но продолжает оставаться в силе и поныне.

[5] Поскольку величина L_* образована *исключительно* из соображений требуемой размерности, численный множитель под корнем или перед корнем можно назначать любым. Далее станет понятно, почему я выбрал число 24π.

[6] Хотя очень непросто критиковать еще не созданную теорию, все же трудно удержаться от того, чтобы не обратить внимания на заведомую физическую бессодержательность понятия «квант (дискретность) пространства». Пространство, вне зависимости от того, считается оно пустым или материальной средой, не может не считаться континуумом — средой, *непрерывной по определению*.

[7] Словосочетание «квантованное пространство» автору этой книги кажется таким же бессмысленным, как «импульс покоя» (см. с. 50).

что многосвязное и скрученное пространство, несомненно, позволит «создать» из него спин.

Далее, из трех «мировых» констант g_0, ς, $\hbar$ можно образовать также «*фундаментальную массу*» («квант» массы):

$$m_* \equiv \sqrt{6\pi \cdot g_0 \cdot \hbar \cdot \varsigma}. \qquad (2)$$

Добавив еще одну «мировую» константу — электрическую постоянную пустого пространства (ε_0), равную $\approx 5{,}5 \cdot 10^5 \left(\frac{\text{эВ}}{\text{В}^2 \cdot \text{см}}\right)$, — можно образовать «*фундаментальный заряд*» («квант» заряда):

$$Q_* \equiv \sqrt{6\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \hbar \cdot \varsigma}. \qquad (3)$$

Многосвязное пространство, как считают геометристы, позволит объединить массу и заряд в топологически определенном элементе пространства. Прообразом его часто выступает так называемая «ручка» в *нетрехмерном* пространстве (на рис. 1 представлена «ручка», конечно, в трехмерном пространстве).

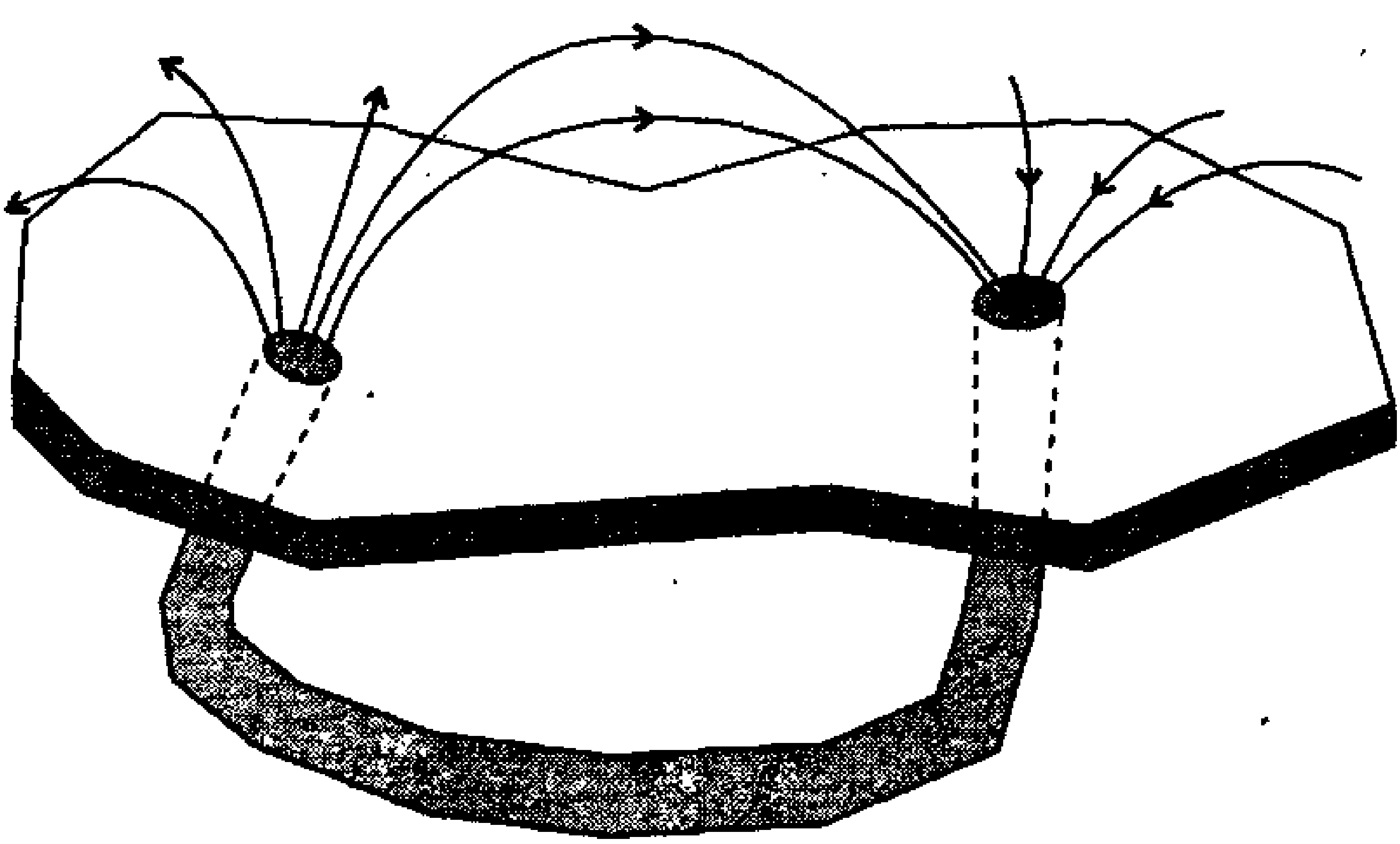

Рис. 1. «Ручка» в трехмерном пространстве.

Отверстия «ручки» предполагается интерпретировать как два электрических заряда разного знака (линии со стрелками символизируют силовые линии электрического поля), а внутренность «ручки» наделить массой. Однако такие понятия, как «отверстие» и «внутренность ручки», физической содержательностью обладают, пока речь идет о *трехмерном* пространстве.

Остаются незадействованными «фундаментальное время» и «фундаментальный магнитный поток», равные соответственно

$$\sqrt{\frac{\pi \cdot \hbar}{6g_0\varsigma^5}} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{\hbar}{6\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varsigma}},$$

но эти понятия геометристы, по крайней мере пока, активно не используют.

На этом историко-физическое введение заканчивается. Тот факт, что величина $\hbar$ должна входить в основные соотношения и уравнения квантовой геометродинамики, сомнений не вызывает по определению. Но одно обстоятельство совершенно необходимо подчеркнуть, учитывая, что все надежды на успешное решение упоминавшейся в самом начале этого Приложения «сверхзадачи» физики связаны с «фундаментальными конструкциями» L_*, m_*, Q_*. Все они должны возникнуть в результате логических рассуждений и теоретических расчетов, но никак не в результате простой манипуляции величинами g_0, ς, $\hbar$, ε_0. Лишь тогда станет ясно, действительно ли мы имеем дело с «квантом пространства» и т. п. «величинами».

Если в рамках квантовой геометродинамики «фундаментальные конструкции» окажутся невыводимыми, это будет означать провал очередной попытки объявить реальные элементарные частицы ***состоящими из материального континуума — пространства***, в котором им тогда только и останется, что пребывать.

* * *

Если судить по научной литературе, налицо ***заведомый*** оптимизм в отношении возможностей именно ***вывода*** величин L_*, m_*, Q_* в рамках пока все еще будущей теории. А вот интересно, так уж ли неоправдан ***заведомый*** пессимизм?

Имея в виду подобную дилемму, хотелось бы предложить вниманию читателя свой ***вывод*** этих величин. Полностью игнорируя геометродинамику, я попробую ***вывести*** все три «фундаментальные конструкции» L_*, m_*, Q_* именно ***естественным*** образом, а вовсе не манипулируя известными константами с целью получить в результате величину желаемой размерности. Однако в связи с тем, что я буду исходить из представления о спине как о механическом моменте ***точечной*** частицы, обусловленном ее вращением по собственной орбите, читателю вначале предлагается сравнить отрывок из предисловия к книге «Предвидение Эйнштейна», написанной одним из создателей геометродинамики Д. Уилером[8], с отрывком из одной из книг автора[9].

Итак, сначала «Предвидение Эйнштейна».

«В предлагаемой вниманию читателя книге обсуждается... принципиально новый путь поиска фундаментальной теории пространства, времени и материи (**под материей подразумеваются то элементарные частицы, то материальный континуум (поле) — *Ф. В.***). Этот путь — теория суперпространства, или квантоводинамическая топология.

....

Идею теории суперпространства легко понять из сравнения ее с квантовым вариантом нашей планкеонной теории элементарных частиц и вакуума, которую можно представить следующим образом. Непрерывное распределение материи с некоторой плотностью существует в любой точке пространства-времени. Вследствие очень сильного гравитационного взаимодействия эта материя в определенный момент собственного времени образует топологически отделенные друг от друга замкнутые объекты типа замкнутых моделей Вселенной размерами $L \approx 10^{-33}$ см и плотностью $\approx 10^{95}\ \dfrac{\text{г}}{\text{см}^3}$ или более сложной топологии (с n ручками). В следующий момент собственного времени происходит полное размыкание этих объектов, и вся дальнейшая эволюция образования нового объекта с новой топологией подчиняется квантоводинамическому закону. Этот объект был назван нами планкеоном. Усредненная по времени наблюдаемая энергия, заключенная во всем пространстве-времени, есть энергетические флуктуации вакуума. Область вакуума с повышенным возбуждением есть элементарная частица.

Сравним теперь изложенные представления с основными постулатами теории суперпространства. Элементом суперпространства является пустая 3-геометрия ${}^{(3)}G$, оснащенная n ручками. Топологическая замкнутость ее не объясняется искривлением пространства-времени материей, а постулируется. Причина искривления, по мнению Уилера, кроется в еще более глубоком уровне строения природы, который может быть назван "уровнем предгеометрии". **Усложненная топология каждого элемента суперпространства должна объяснить спин элементарных частиц** (выделено мною — *Ф. В.*). Эволюция всего суперпространства подчиняется квантовому принципу. Области с повышенным возбуждением есть элементарные частицы».

Я не считаю возможным сейчас ни обсуждать, ни критиковать приведенный текст. Не буду также касаться физической содержательности многих использованных понятий. Возможно, что есть специалисты, прекрасно понимающие все, что написано в цитированном отрывке,

---

[8] *Уилер Дж.* Предвидение Эйнштейна. М.: Мир, 1970. Предисловие к русскому изданию книги написано проф. К. П. Станюковичем и В. Г. Лапчинским.

[9] *Вильф Ф. Ж.* Еще раз о спине точечной частицы, формуле Эйнштейна и релятивистском уравнении Дирака. М.: УРСС, 2000.

понимающие, в частности, что представляет собой «замкнутая Вселенная размером 10^{-33} см» и почему «*усредненная по времени* наблюдаемая энергия, заключенная во всем пространстве-времени», должна быть «энергетическими *флуктуациями* вакуума».

Теперь, прежде чем привести отрывок из собственной книги, я хотел бы заметить, что нетрадиционный способ описания вращения точечной частицы, предложенный в гл. 7 этой книги, понадобился лишь потому, что свободной частице «предлагалось» вращаться именно в *пустом* пространстве, в котором, согласно *традиционному* представлению о пустоте, не может находиться никакого материального объекта (ни точечного, ни континуального). А ведь только такой объект может притягивать к себе частицу, что и дает ей возможность вращаться.

Но, хотя придуманный в гл. 7 способ позволил описать вращение и, таким образом, объяснить спин частицы, не пользуясь понятиями ускорения и силы, сверхзагадочным стало выглядеть существование собственной стационарной орбиты. Ведь физическая содержательность этого понятия полностью опирается на понятия силы и ускорения.

Выход из создавшейся ситуации мне кажется единственным — предположить, что пустое пространство устроено не так, как всегда считалось в рамках «классической» (то есть еще доквантовой) физики. В связи с этим вниманию читателя и предлагается пример не вполне традиционной «конструкции» пустого пространства, взятый из книги автора «Еще раз о спине точечной частицы, формуле Эйнштейна и релятивистском уравнении Дирака».

«Все бесконечно протяженное пространство заполнено флуктуирующим (хаотически колеблющимся) как в пространстве, так и во времени электромагнитным полем. И пространственный, и временной "периоды" колебаний напряженности поля исчезающе малы. Отсюда следует, что пространство представляет собой еще и *сплошную* среду, *электронейтральную лишь в среднем*.

Стоит обратить внимание на несколько особенностей предложенной "конструкции" пространства (отныне отождествляемого с материальным континуумом — сплошной средой)[10].

1. В любой точке пространства плотность распределенного по нему электрического заряда (ρ), будучи усредненной по сколь угодно малому, но *отличному от нуля*, промежутку времени, одинакова и равна нулю.

2. В любой момент вечности плотность распределенного электрического заряда, будучи усредненной по сколь угодно малому, но *отличному от нуля* объему пространства, одинакова и равна нулю.

[10] Описываемая далее конструкция сегодня уже не может считаться полностью оригинальной.

3. Сказанное в пп. 1, 2 справедливо и в отношении векторов напряженностей электрического ($\vec{\mathscr{E}}$) и магнитного ($\vec{H}$) полей, хотя ***среднее значение модуля каждого вектора отлично от нуля***[11].

4. Несмотря на то, что области пространства конечных размеров могут быть в течение некоторых промежутков времени электрически заряжены, внутри этих областей ***не существует частиц — носителей заряда***[12]. В подобную сплошную среду можно вставить без сопротивления любой материальный объект.

5. Если, согласно традиционной точке зрения, отождествить флуктуирующее электромагнитное поле с фотонным газом (газом "виртуальных" фотонов), нетрудно сообразить, что флуктуации объемной плотности заряда, распределенного в пространстве, и флуктуации объемной плотности энергии фотонного газа будут сопутствовать друг другу. При этом непрерывному возрастанию заряда определенного знака в некоторой области пространства воспрепятствует возникающий там же электрический ток[13], а непрерывному сжатию (или расширению) фотонного газа в некоторой области пространства воспрепятствует возникающий там же поток энергии.

Таким образом, точечная, заряженная, вращающаяся по собственной орбите частица, даже будучи одним-единственным материальным объектом в пустом пространстве, не может считаться свободной в традиционном смысле слова, ибо пространство допустимо считать пустым только в кавычках. Упомянутая частица взаимодействует с "пустым" пространством как "электростатически", поляризуя его своим зарядом, так и "электродинамически", излучая и поглощая свет (электромагнитное поле). Не может ли тогда оказаться так, что в результате взаимодействия с "пустым" пространством, например, точечного электрона распределение пространственного (континуального) заряда внутри собственно-орбитальной сферы электрона приобрело вид, показанный на рис. 2? Что же касается самого точечного электрона, то, поскольку в любой момент времени он с равной вероятностью присутствует в любой точке сферы,

---

[11] То есть флуктуирует не только модуль вектора, но и его направление, из-за чего среднее значение вектора равно нулю, хотя среднее значение квадрата вектора оказывается отличным от нуля.

[12] Читателю, знакомому с основами электростатики и электродинамики, имеет смысл принять во внимание два обстоятельства.

1. В не обладающем сферической симметрией пространственно неоднородном электрическом поле напряженностью $\vec{\mathscr{E}}$ возникает распределенный электрический заряд объемной плотности ρ. Величины напряженности ($\vec{\mathscr{E}}$), потенциала (φ) и плотности (ρ) в любой момент времени связаны уравнением Даламбера: $\rho = \varepsilon_0 \cdot \left(\operatorname{div}\vec{\mathscr{E}} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)$, где $\vec{\mathscr{E}} = -\operatorname{grad}\varphi$.

2. Изменение объемной плотности заряда во времени сопровождается в любой точке пространства электрическим током, представляющим собой перемещение заряженных элементов сплошной среды (например, сжатие-растяжение). Плотность тока $\vec{J}$ связана с величиной ρ соотношением: $\operatorname{div}\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$.

[13] Этот ток представляет собой перемещение друг относительно друга электрически заряженных областей сплошной среды, а не частиц.

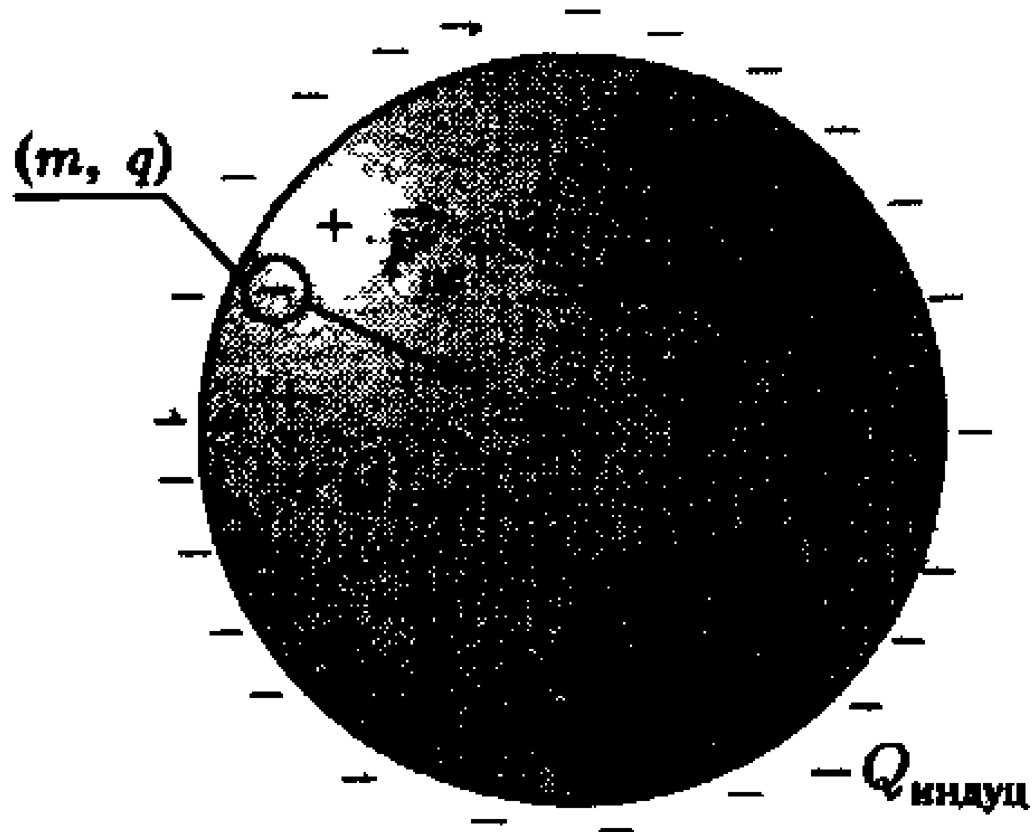

Рис. 2. Распределение среднего по времени индуцированного электрического заряда в пределах собственно-орбитальной сферы электрона. Положительный заряд распределен по объему пространства внутри сферы, а отрицательный — в исчезающе тонком слое, прилегающем снаружи к поверхности сферы.

заряд его выглядит размазанным по ее поверхности. В результате оказывается, что уже не только *модуль* вектора результирующего (флуктуирующего во времени) электрического поля, но уже *сам вектор в среднем по времени отличен от нуля в каждой точке пространства и внутри собственно-орбитальной сферы, и вне ее.* Именно этот вектор и следует называть электростатическим полем, созданным точечной частицей[14].

На рис. 3 представлен график зависимости значения напряженности этого электростатического поля (зависимости, соответствующей распределению заряда, представленному на рис. 2) от расстояния от центра собственно-орбитальной сферы.

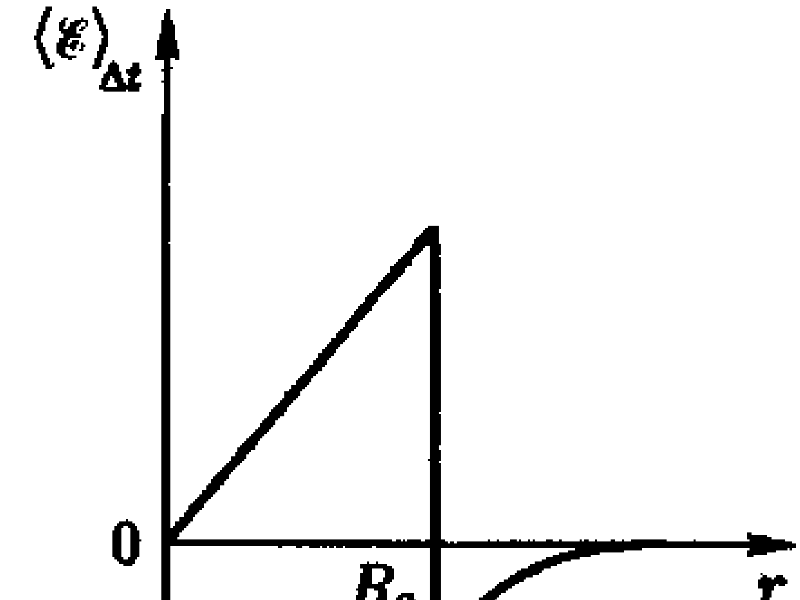

Рис. 3. График зависимости усредненного по времени значения напряженности электрического поля от расстояния от центра собственно-орбитальной сферы. За ее пределами имеет место закон Кулона:

$$\langle \mathscr{E} \rangle_{\Delta t} = \frac{Q_{\text{частицы}}}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} \quad \text{при} \quad r > R_0.$$

Из рис. 2 следует, что электрон притягивается к центру своей орбитальной сферы с силой $\vec{F}_{\text{цс}}$, значение которой можно вычислить, руководствуясь следующими соображениями.

С одной стороны значение силы $\vec{F}_{\text{цс}}$; поддерживающей вращение точечной заряженной частицы, должно быть равно

$$F_{\text{цс}} = m \cdot \frac{u_0^2}{R_0}, \qquad (4)$$

[14] Правильнее говорить — полем, возникшим вместе с точечной частицей.

где $\dfrac{u_0^2}{R_0}$ и есть значение центростремительного ускорения, причем, как уже говорилось ранее, $u_0^2 = 3\varsigma^2$ [15].

С другой стороны, значение (стационарное) центростремительной силы притяжения частицы к индуцированному ею же стационарному заряду, согласно закону Кулона, равно

$$F_{цс} = \frac{Q_{индуц} \cdot Q_{частицы}}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R_0^2}, \tag{5}$$

где ε_0 — электрическая постоянная "пустого" пространства; R_0 — радиус собственно-орбитальной сферы.

Из равенств (4) и (5) можно найти величину того индуцированного заряда, который и удерживает частицу на собственной орбите:

$$|Q_{индуц}| = |Q_{частицы}| \cdot \frac{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot u_0^2 \cdot m \cdot R_0}{(Q_{частицы})^2}. \tag{6}$$

Значение радиуса R_0 можно вычислить, исходя из достоверно установленного абсолютного значения спина точечной частицы (равного $\dfrac{\sqrt{3}\hbar}{2}$) и принимая, простоты ради, что $m = m_0$. Подставляя в качестве u_0^2 величину $3\varsigma^2$, получаем из формулы (6)

$$|Q_{индуц}| = \frac{3}{2} \cdot |Q_{частицы}| \cdot \frac{1}{\alpha}, \tag{7}$$

где

$$\alpha \equiv \frac{(Q_{частицы})^2}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \hbar \cdot \varsigma}. \tag{8}$$

Если в качестве заряда частицы принять значение заряда электрона, то $\alpha \approx \dfrac{1}{137}$ (это очень знаменитая "постоянная тонкой структуры"); $|Q_{индуц}| \approx$ 356,3 электрона [16].

Заметим, что в каких бы движениях ни участвовал центр инерции точечной заряженной частицы (вращающейся по собственной орбите), повсюду частицу будут сопровождать непрерывно индуцируемые ею внутриорбитальный и приорбитальный заряды.

Отметим также, что электростатическое поле, *автоматически* возникающее в пространстве с появлением в нем *точечной* вращающейся частицы, нигде не равно бесконечности. Энергию, содержащуюся в этом стационарном поле ($E_{поля}$), можно вычислить, пользуясь общепринятым в электростатике соотношением

$$E_{поля}(Q) = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \int_0^{\infty} \mathscr{E}^2(Q, r) \cdot 4\pi \cdot r^2 \cdot dr.$$

---

[15] См. гл. 7 этой книги.

[16] Следует помнить, что индуцированный заряд не создан *точечными* заряженными частицами, а представляет собой *заряженную сплошную* среду.

Естественно, напряженность поля, созданного именно индуцированными зарядами (с противоположными знаками), в пространстве *вне* собственно-орбитальной сферы точечной заряженной частицы будет равна нулю. Далее, если допустить, что плотность ($\rho_{\text{индуц}}$) распределенного внутри орбитальной сферы индуцированного заряда не зависит от r, то

$$\rho_{\text{индуц}} = \frac{Q_{\text{индуц}}}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_0^3},$$

$$\mathscr{E}(\rho_{\text{индуц}}, r) = \frac{\rho_{\text{индуц}} \cdot r}{3\varepsilon_0} = \frac{Q_{\text{индуц}} \cdot r}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R_0^3} \quad \text{при} \quad r < R_0,$$

и

$$E_{\text{поля}}(Q_{\text{индуц}}) = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \int\limits_0^{R_0} \mathscr{E}^2(\rho_{\text{индуц}}, r) \cdot 4\pi \cdot r^2 \cdot dr = \frac{9m_0 \cdot \varsigma^2}{20\alpha}.$$

Энергия поля, созданного самой частицей, заряд которой справедливо считать в среднем по времени размазанным по поверхности сферы радиуса R_0, равна нулю внутри сферы, а вне ее равна

$$E_{\text{поля}}(Q_{\text{частицы}}) = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \int\limits_{R_0}^{\infty} \left(\frac{Q_{\text{частицы}}}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}\right)^2 \cdot 4\pi \cdot r^2 \cdot dr = \alpha \cdot m_0 \cdot \varsigma^2.$$

Таким образом, энергия внеорбитального электростатического поля, сопутствующего такой точечной заряженной частице, как, например, электрон, составляет очень малую долю его кинетической энергии вращения — бывшей энергии "покоя":

$$E_{\text{поля}}(Q_{\text{частицы}}) = \alpha \cdot m_0 \cdot \varsigma^2 \approx \frac{m_0 \cdot \varsigma^2}{137}».$$

* * *

Итак, все цитаты теперь позади, и можно приступить к обещанному выводу «фундаментальных конструкций».

Отождествим гравитационный заряд точечной частицы с ее инерциальной массой и предположим, что частица электронейтральна. Тогда центростремительная сила, поддерживающая вращение частицы по собственной орбите, согласно сказанному в последнем из цитированных отрывков из книг, должна быть обусловлена поляризующим действием частицы на флуктуирующее гравитационное поле, отождествляемое с «пустым» пространством. Равенства, аналогичные равенствам (4) и (5) принимают — в системе координат, связанной с центром инерции частицы, — следующий вид:

$$F_{\text{цс}} = \frac{M_{\text{индуц}} \cdot m_{\text{частицы}}}{4\pi \cdot g_0 \cdot R_0^2}, \tag{9}$$

$$F_{цс} = m_{частицы} \cdot \frac{u_0^2}{R_0}, \quad (10)$$

откуда следует, что

$$M_{индуц} \cdot m_{частицы} = 4\pi \cdot g_0 \cdot R_0 \cdot m_{частицы} \cdot u_0^2. \quad (11)$$

Исходя из выражения для спина точечной частицы

$$S = \frac{\sqrt{3}\hbar}{2} = R_0 \cdot m_{частицы} \cdot u_0,$$

находим R_0 и, принимая во внимание, что $u_0 = \sqrt{3}\varsigma$, приходим к формуле

$$M_{индуц} \cdot m_{частицы} = 6\pi \cdot g_0 \cdot \hbar \cdot \varsigma. \quad (12)$$

Если оказывается, что *численное* значение массы *точечной* электронейтральной частицы[17] совпадает (просто совпадает и не более того) с *численным* значением величины $\sqrt{6\pi \cdot g_0 \cdot \hbar \cdot \varsigma}$ ($\approx 4 \cdot 10^{-5}$ г)[18], не приходится удивляться тому, что *индуцируемая* масса ($M_{индуц}$) — результат уплотнения материального континуума, — *непрерывно* распределенная внутри собственно-орбитальной сферы, также точно равна $\sqrt{6\pi \cdot g_0 \cdot \hbar \cdot \varsigma}$.

Разумеется, при вышеупомянутом совпадении *численные* значения радиуса собственно-орбитальной сферы *точечной* частицы и периода ее вращения оказываются равными соответственно

$$R_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{24\pi \cdot g_0 \cdot \varsigma^3}}; \quad \tau_0 = \sqrt{\frac{\pi \cdot \hbar}{6 g_0 \cdot \varsigma^5}}.$$

Как видим, ***нет никаких «квантов» массы, пространства, времени***. Речь идет о *точечной* частице и материальном *континууме* (в данном случае — гравитационном поле), просто взаимодействующих друг с другом, и совершенно бессмысленно приписывать каждой из величин

$$\sqrt{6\pi \cdot g_0 \cdot \hbar \cdot \varsigma}; \quad \sqrt{\frac{\hbar}{24\pi \cdot g_0 \cdot \varsigma^3}}; \quad \sqrt{\frac{\pi \cdot \hbar}{6 g_0 \cdot \varsigma^5}}$$

традиционный эпитет «фундаментальная»[19].

---

[17] В ее роли может выступать, например, нейтрино, масса которого равна $m_{частицы} = P/\varsigma$.

[18] Кинетическая энергия поступательного движения нейтрино при этом равна $\approx 10^{21}$ эВ.

[19] Столь же «фундаментальными» являются и такие величины, как «фундаментальный электрический заряд» и «фундаментальный магнитный поток», равные (соответственно) $\sqrt{6\pi \cdot \varepsilon \cdot \hbar \cdot \varsigma} \approx 2{,}3 \cdot 10^{-18}$ Кл, $\sqrt{\frac{\hbar}{6\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varsigma}} \approx 0{,}5 \cdot 10^{-16}$ В $\cdot$ с.

Точечная частица и материальный континуум (поле) *несводимы* друг к другу, являясь *качественно* отличными, только — каждый самому себе тождественными объектами физической реальности, дополняющими друг друга.

Я надеюсь, что теоретические конструкции, модели и предположения специалистов, занятых разработкой квантовой геометродинамики, показались читателю по крайней мере не более обоснованными, чем то представление о точечной частице и пространственном континууме, с которым он только что познакомился.

Приложение 6

Универсальный переходный процесс и самоторможение протяженных тел

Рассмотрим протяженное вдоль X-оси сплошное твердое тело. Предположим, оно находится на идеально гладкой поверхности и, следовательно, не испытывает трения и когда покоится, и когда движется. Теперь допустим, что с момента $t = 0$ (начало отсчета времени) на тело действует неизменная во времени внешняя сила $F_в$, приложенная к торцу T_1 (рис. 1, а).

Если считать, что тело является ***абсолютно*** твердым, то, согласно традиционным, дорелятивистским представлениям, ***все*** точки тела (по всей его длине) ***одновременно*** ощутят действие силы и приобретут ***одинаковое*** ускорение, несмотря на то, что в силовой контакт в момент $t = 0$ вошла только бесконечно узкая полоска, прилегающая к торцу T_1. *Именно из-за одинаковости ускорения всех точек протяженного тела* (массы m) последнее и можно уподобить одной точечной частице той же массы. Лучше всего эту роль исполняет центр инерции протяженного тела. Таким образом, можно заменить реальную обстановку, представленную на рис. 1, а, эквивалентной (рис. 1, б), отлично приспособленной для применения простого математического аппарата.

Хотелось бы обратить внимание читателя на то, что все сказанное справедливо, если протяженное, сплошное тело считается именно абсолютно твердым. Только тогда сила $F_в$ мгновенно распределяется между бесконечно большим числом (N) «частиц» (из которых состоит сплошное протяженное тело массы m). В результате на каждую из этих «частиц» действует одинаковая сила, равная $F_{в,*} = \dfrac{F_в}{N}$ (здесь $N = \dfrac{m}{m_*}$, а m_* — бесконечно малая масса одной «частицы»). Естественно, что каждая «частица» приобретает (причем — мгновенно) одинаковое ускорение, равное

$$a = \frac{F_{в,*}}{m_*} = \frac{\left(\dfrac{F_в}{N}\right)}{m_*} = \frac{F_в}{m}.$$

Тогда с момента приложения силы к торцу T_1 положение каждой, начавшей двигаться (с ускорением) «частицы» относительно любой другой остается таким же, каким оно было до приложения силы. Этот факт подтверждает, что тело, названное абсолютно твердым, действительно не меняет свои размеры под действием приложенной силы.

Если бы в ситуации, представленной на рис. 1, а, фигурировало тело упругое, его реакция на приложенную к торцу T_1 внешнюю силу была бы иной, поскольку ***вдоль упругого тела сила $F_в$ не может распространяться мгновенно.*** Поэтому в течение некоторого времени упругое тело будет сжиматься из-за того, что торец T_1 будет придвигаться к остающемуся в это время неподвижным правому торцу. Сжатие является естественным следствием возникновения в упругом теле силы

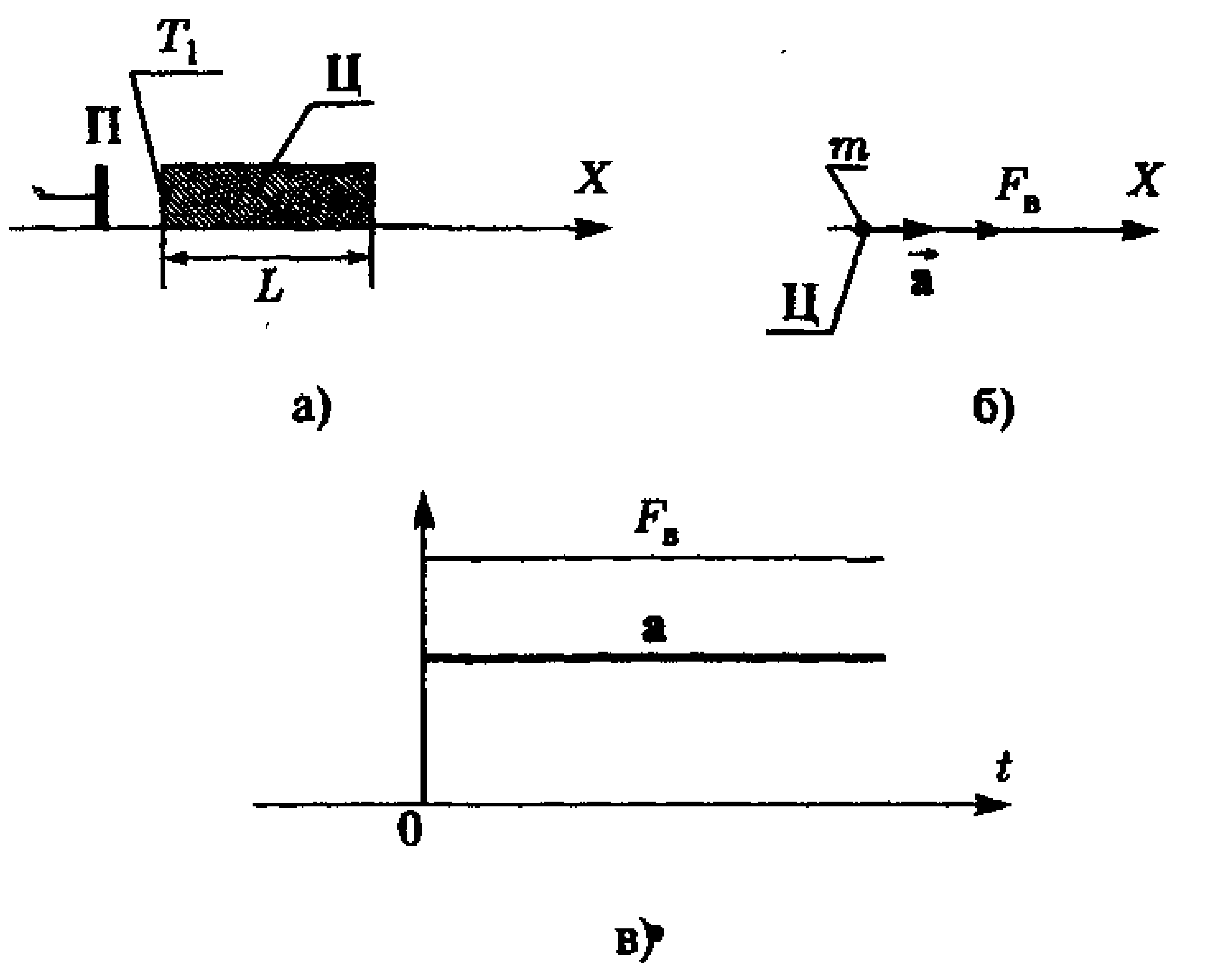

Рис. 1. Рассматриваемая экспериментальная ситуация.

а) В момент $t = 0$ «поршень» П соприкасается с торцем T_1 сплошного протяженного тела и с этого момента давит на торец T_1 с неизменной силой $F_в$, направленной вправо. Точка Ц — центр инерции тела.

б) Традиционное представление, в котором сила $F_в$ действует на точечную частицу массы m. На роль этой частицы лучше всего подходит центр инерции тела той же массы m.

в) Традиционное представление о виде зависимости ускорения (a) центра инерции тела от времени при заданной зависимости от времени внешней силы.

сопротивления, действующей противоположно силе внешней[1)]. В результате тело ***как целое*** приобретает ускорение, равное $\frac{F_в}{m}$, отнюдь не мгновенно. Это означает, что ускорение центра инерции протяженного тела в ответ на скачкообразно приложенную внешнюю силу нарастает во времени не скачком, а плавно (рис. 2).

Что же касается величины $\frac{F_в}{m}$, то ее целесообразно назвать стационарным значением ускорения и обозначить символом $a_в$.

Итак, вывод: ***любое протяженное неабсолютно твердое тело*** вовлекается под действием внешней силы в переходный процесс нарастания ускорения центра инерции тела ***вне зависимости от существования сопротивления со стороны окружающей обстановки***[2)].

В течение этого процесса по телу пробегает волна сжатия-растяжения.

Вполне возможно, что все сказанное искушенный читатель посчитает совершенно тривиальным. Однако именно на фоне сказанного хорошо проявляется проблема совместимости существования абсолютно

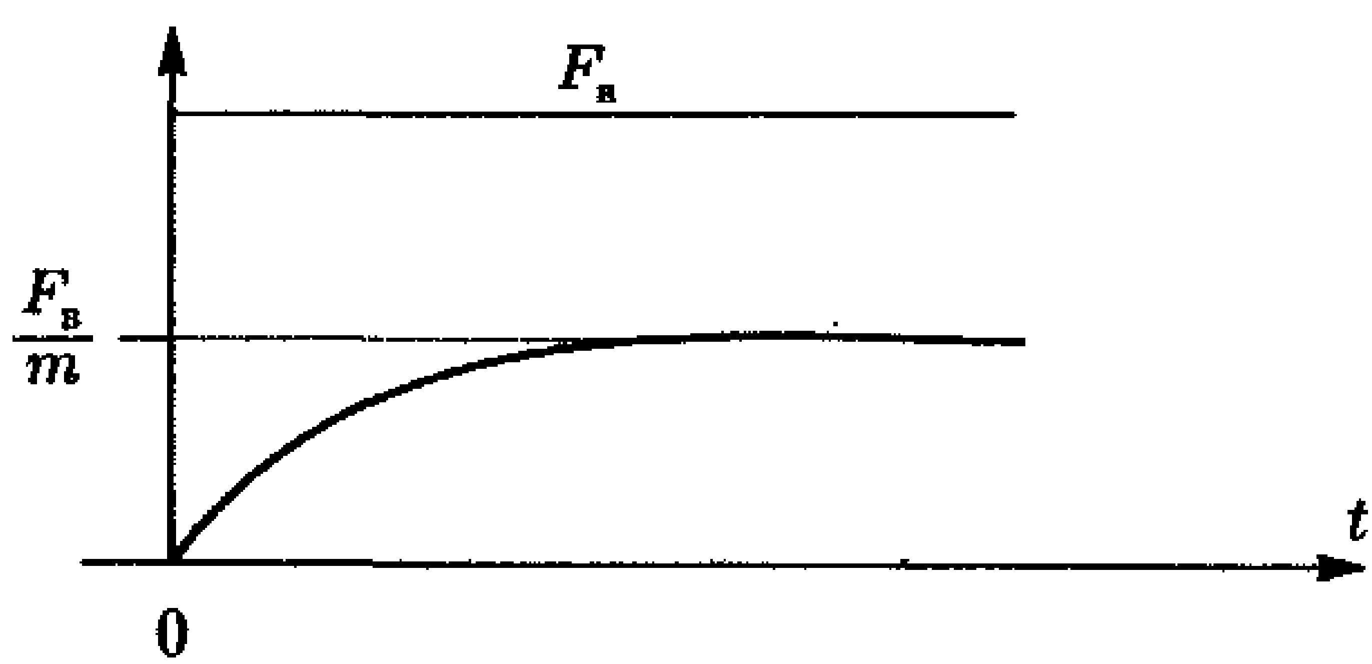

Рис. 2. Переходный процесс.

Силу самоторможения можно определить выражением $F_{с.т.} = -\frac{m \cdot l}{V} \cdot \frac{da}{dt}$, где m — масса тела, l — его длина, V — скорость распространения фронта деформации.

[1)] В грубом приближении ситуация выглядит следующим образом. Узкая полоска, прилегающая к торцу T_1, в первые мгновения после приложения внешней силы упирается в еще не успевшую сдвинуться остальную часть тела. Реакция опоры и является той силой, которая, согласно третьему закону Ньютона, приложена к упомянутой полоске и направлена противоположно силе внешней. В свою очередь, сжавшаяся полоска передает внешнюю силу на полоску, еще не успевшую сжаться.

[2)] Таким образом, представляется оправданным использование при описании рассматриваемого переходного процесса термина «самоторможение», хотя этот термин был введен в научный оборот по другому, весьма конкретному поводу.

твердых тел с представлениями частной теории относительности. В этой связи предлагается рассмотреть следующий пример.

Пусть тело, представляющее собой сплошную среду, покоится относительно j-й системы отсчета, причем длина тела вдоль X-оси равна L. Теперь представим себе, что вдоль общей X-оси движется равномерно со скоростью V_1 k-система отсчета. Связанный с ней k-й наблюдатель обоснованно считает, что длина тела вдоль X-оси равна $L \cdot \sqrt{1-\left(\frac{V_1}{\varsigma}\right)^2}$. Если скорость (в другой раз) окажется равной V_2, то и длина тела в представлении k-го наблюдателя изменится. Таким образом, k-й наблюдатель резонно считает сплошное протяженное тело способным сжиматься (и растягиваться) в пределах от нуля до L. Тем не менее, ***то изменение длины тела, о котором сейчас идет речь, как совершенно очевидно, не сопровождается изменением силы взаимодействия между частицами тела.*** Подобное изменение могло бы возникнуть только в ответ на действие внешней силы. Поэтому изменение длины тела, обусловленное его равномерным и прямолинейным движением относительно наблюдателя («лоренцево сокращение»), называют (в некоторых книгах) *«чисто кинематическим сжатием»*. ***Именно вследствие этого эффекта кое-кто считает невозможным признать существование абсолютно недеформируемого тела:*** абсолютно твердым телом в рамках частной теории относительности следовало бы считать такое, которое принципиально не может двигаться.

Однако мне кажется, что давать определение понятию «абсолютно твердого тела» можно только с точки зрения реакции тела на внешнюю силу. *Разумно считать абсолютно твердым телом такое сплошное протяженное тело, в котором силовое воздействие* ***мгновенно охватывает все его части****, несмотря на то, что* ***внешняя сила в это мгновение приложена лишь к какой-то одной части тела***[3].

Если вот так определенное абсолютно твердое протяженное тело до приложения внешней силы покоилось, то в момент приложения силы к одной точке тела все его части приобретут ***одинаковое*** ускорение. Следовательно, ни сжатия, ни растяжения тела не возникнет, и потому допустимо представить его одной точечной массой (ее роль лучше всего исполнит центр инерции тела).

Естественно, что и «некинематически» определенное абсолютно твердое тело несовместимо с одним из основополагающих постулатов частной теории относительности, согласно которому силовое

---

[3] Следует заметить, что и в этом случае сила взаимодействия между частицами тела не изменяется, а стало быть, отсутствует причина для возникновения его деформации.

воздействие любой природы не может распространяться в пространстве со скоростью, превышающей величину ς. Следовательно, в любом реальном протяженном теле в ответ на приложение внешней силы деформации обязательно должны возникать и какое-то время существовать повсюду, даже если внешняя сила приложена только к одной точке тела.

В связи со сказанным хотелось бы обратить внимание читателя на одно важное обстоятельство.

Когда мы говорим о сжимаемости ***реального*** твердого тела конечных размеров, то физическая содержательность понятия «сжимаемость» опирается на представление о ***пространственном разделении*** частиц, из которых тело считается образованным. Равновесное состояние тела является тогда следствием равенства сил притяжения и отталкивания, действующих между пространственно разделенными частицами тела, и равенство это имеет место только при вполне определенном межчастичном расстоянии. Если вследствие внешних воздействий это расстояние, например, увеличивается, то упомянутое равенство нарушается и возникают внутренние результирующие силы сжимающего характера. При увеличенном расстоянии имеет место равенство именно ***результирующей силы межчастичного взаимодействия*** силе внешней.

Но как быть, если тело (пусть — гипотетическое) представляет собой именно континуум — сплошную среду, не состоящую из пространственно разделенных частиц? Что может означать тогда сжатие-растяжение подобного тела? Еще вопрос: если внешняя сила приложена к одной части подобного тела, за счет чего силовое воздействие будет распространяться на все остальные его части?

Поставленные вопросы неактуальны, если тело, о котором сейчас идет речь, является продуктом свободной игры ума. Но что если реально существует материальный объект, который и в самом деле представляет собой континуум (сплошную среду), причем такой, что сила, приложенная к одной его точке, действительно распространяется затем по всему континууму, а еще и такой, для которого понятие о деформации является физически содержательным? Так вот, материальный континуум, обладающий перечисленными свойствами, существует. Это — поле (электрическое или гравитационное), возникшее вместе с реальным телом (либо состоящим из пространственно разделенных частиц, либо представляющим собой одну точечную частицу). Необходимо выяснить, происходит ли в такой системе в ответ на приложение внешней силы описанный выше переходный процесс. Поскольку при этом допустимо считать, что ***внешняя сила приложена непосредственно не к точке поля, а к его источнику*** (исходно находящемуся в состоянии покоя относительно выбранной системы отсчета), предлагается в качестве источника взять точечную частицу. Это позволит выяснить, может ли испытывать самоторможение *истинно точечная* частица, которую в принципе нельзя представить состоящей из частей.

Начну с замечания, что точечная частица, способная пребывать в покое до приложения внешней силы, обязательно должна обладать и *массой покоя*, и электрическим зарядом (см. § 10.3). Следовательно, еще в состоянии покоя такая частица погружена в электрогравитационное статическое поле — материальный континуум (сплошную среду), обладающий энергией, распределенной в пространстве с конечной плотностью.

Простоты ради будем считать нашу точечную частицу погруженной только в созданное ею же электрическое поле[4]. Не вдаваясь сейчас в объяснения, будем также считать, что это поле как цельный объект обладает инерциальной массой вполне определенной величины[5].

Под действием неизменной во времени внешней силы заряженная частица начинает ускоряться, из-за чего от нее отрывается электромагнитное поле (частица излучает). Кроме того, вместе с частицей передвигается и то поле, которое с ней связано навечно («неотрывающееся» поле). До начала движения все *бесконечно протяженное* пространство было заполнено полем, но – статическим. Образно выражаясь, это поле другой конфигурации, нежели движущееся вместе с частицей, и переход ее из состояния покоя в состояние ускоренного движения сопровождается деформацией начального поля. В первое мгновение перехода поле во всем пространстве остается статическим, то есть — недеформированным. Это означает, что сила сопротивления движению частицы в точности равна силе внешней. Лишь в процессе излучения конфигурация поля постепенно меняется во все более отдаленных областях пространства: поле статическое *постепенно* превращается в поле, движущееся вместе с частицей с неизменным во времени ускорением[6]. Таким образом, в процессе перехода заряженной частицы из состояния покоя в состояние движения первоначально созданное ею поле оказывает сопротивление ее движению.

Вполне допустимо заменить материальный континуум (поле) его центром инерции (предположив, что там же находится и центр инерции частицы — источника поля) и считать, что внешняя сила и сила сопротивления приложены именно к этому центру.

---

[4] Правильнее было бы говорить — поле, возникшее вместе с частицей.

[5] В связи с этим утверждением см. Приложение 7.

[6] Учитывая бесконечную протяженность пространства, этот процесс хотя и с затуханием, но должен длиться вечно.

Теперь обратимся к ситуации, рассматриваемой почти во всех солидных монографиях, посвященных классической электродинамике. В той ситуации заряженная частица движется прямолинейно относительно инерциального наблюдателя, причем: скорость частицы значительно меньше величины ς[7]; частица обладает ускорением ($\vec{a}$), которое к тому же изменяется во времени. Задача, которую требуется решить, состоит в выяснении того, какие силы должны действовать на частицу.

Традиционный ответ таков: на нее, помимо силы внешней (причины ***возникновения*** ускорения), действуют еще две силы. Одна из них (фигурирующая далее под символом $\vec{F}_т$) равна по абсолютной величине $\dfrac{q^2}{6\pi\varepsilon_0\cdot\varsigma^3}\cdot\left|\dfrac{d\vec{a}}{dt}\right|$; другая (фигурирующая далее под символом $\vec{F}_0$) равна по абсолютной величине $\dfrac{q^2}{6\pi\varepsilon_0\cdot R_0\cdot\varsigma^2}\cdot|\vec{a}|$ (разъяснение по поводу величины R_0 будет дано ниже).

Происхождение силы $\vec{F}_т$

Эта сила получила название тормозящей, что полностью объясняется ее происхождением.

Дело в том, что частица, движущаяся даже с ***неизменным во времени ускорением***, излучает электромагнитное поле. Отрываясь (непрерывно) от частицы, это поле в виде сферической волны расходится в пространстве, причем фронт волны движется относительно любого инерциального наблюдателя со скоростью ς вне зависимости от скорости частицы. Необходимо подчеркнуть, что при этом безразлично, какой мы представляем себе частицу: точечной или, например, сферической оболочкой радиуса R_0. При этом, когда, образно выражаясь, сфера-поле отрывается от частицы-оболочки, последняя как целое не испытывает отдачи. В этом случае сумма всех элементарных импульсов отдачи (то есть векторов, приложенных к частичкам оболочки) равна нулю. Но, ***если ускорение частицы меняется во времени***, отдача возникает, ибо отрывающееся поле уже не симметрично. Естественно, непрерывно излучая преимущественно, например, вперед (вдоль X-оси), частица непрерывно ощущает силу (реакцию излучения), отталкивающую ее назад. Таким образом, на частицу, движущуюся с нарастающим ускорением, действует сила $\vec{F}_т$, которая стремится уменьшить быстроту нарастания ускорения. Эта сила равна $\vec{F}_т = -\dfrac{q^2}{6\pi\varepsilon_0\cdot\varsigma^3}\cdot\dfrac{d\vec{a}}{dt}$.

[7] Это предположение, не играя принципиальной роли в последующих рассуждениях, позволяет избежать громоздких выражений.

Происхождение силы $\vec{F}_0$

Прежде всего замечу, что, в отличие от силы $\vec{F}_т$, происхождение силы $\vec{F}_0$ связано с обязательным предположением считать частицу протяженным телом. Например, — лишенной толщины сферической оболочкой радиуса R_0.

Что же касается происхождения силы $\vec{F}_0$, то в разных книгах оно объясняется по-разному.

В «Электродинамике» А. Зоммерфельда[8] со ссылкой на работу Г. Лоренца 1909 года говорится, что это *«сила со стороны собственного поля»*[9] и что она *«выражает инерцию электрона и имеет для малых скоростей вид*

$$m \cdot \mathbf{a} = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 \cdot R_0 \cdot c^2} \cdot \mathbf{a}».$$

Р. Фейнман дает свое объяснение[10]: *«...в тех случаях, когда электрон* (считающийся сферической оболочкой — *Ф. В.*) *не ускоряется, равнодействующая сила* (от всех сил, приложенных к частице-оболочке — *Ф. В.*) *равна нулю. Если же мы рассматриваем силу между различными частями ускоряющегося электрона, то действие и противодействие не компенсируют в точности друг друга и электрон действует сам на себя, стараясь уменьшить ускорение».*

На всякий случай обращаю внимание читателя на то, что для уменьшения ускорения требуется такая тормозящая сила, которая зависит не от самого ускорения, а от его производной по времени.

Далее Р. Фейнман пишет: *«Самодействие можно записать в виде ряда. Первый член этого ряда зависит от ускорений* $\mathbf{a}$, *следующий — пропорционален* $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$ *и т. д.»* Затем Р. Фейнман приводит тот самый ряд, первый член которого, если считать частицу сферической оболочкой, имеет вид $\frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 \cdot R_0 \cdot c^2} \cdot \mathbf{a}$. (В книге Р. Фейнмана в этом месте опущен множитель $4\pi\varepsilon_0$ в знаменателе).

---

[8] *Зоммерфельд А.* Электродинамика. М.: ИЛ, 1958. С. 412.

[9] Собственное поле — это поле, возникающее вместе с частицей и ни при каких обстоятельствах от нее не отрывающееся. В глазах инерциального наблюдателя и частица, и это поле остаются связанными друг с другом и покоясь, и двигаясь равномерно и прямолинейно, и ускоряясь.

[10] *Фейнман Р. и др.* Фейнмановские лекции по физике (ФЛФ). Т. 2, гл. 28, § 4. М.: Мир, 1966.

В монографиях В. Пановского и М. Филипс, Д. Иваненко и А. Соколова[11] объяснение состоит в вычислении напряженности поля ($d\vec{\mathscr{E}}$), создаваемого бесконечно малым элементом заряженной оболочки в той «точке» пространства, где в момент времени t оказывается другой бесконечно малый элемент оболочки (dq). При этом предполагается, что она как целое движется относительно инерциального наблюдателя со скоростью $\vec{V}$ такой, что $V^2 \ll \varsigma^2$.

Таким образом, результирующая сила, приложенная к частице помимо силы внешней, равна $\vec{F}_{рез} = \iint\limits_{S_0} dq \cdot d\vec{\mathscr{E}}$, где S_0 — площадь поверхности оболочки.

В результате вычислений оказывается, что:

а) согласно В. Пановскому и М. Филипс, оболочка как целое испытывает *«полную силу реакции*

$$\frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 \cdot \varsigma^3} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} - \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 \cdot R_0 \cdot \varsigma^2} \cdot \mathbf{a}»;$$

б) согласно Д. Иваненко и А. Соколову, *«уравнение движения для электрона с учетом силы самодействия*:

$$m \cdot \mathbf{a} = q \cdot \mathscr{E} - \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 \cdot R_0 \cdot \varsigma^2} \cdot \mathbf{a} + \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 \cdot \varsigma^3} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \ldots».$$

(Здесь $q \cdot \mathscr{E}$ — внешняя *сила*.)

Полагаю, что читатель должен сам решить, понял ли он из приведенных объяснений происхождение силы $\vec{F}_0$. Я, к сожалению, ничего не понял. А теперь объясню, почему необходимо знать — в деталях — происхождение как силы $\vec{F}_т$, так и силы $\vec{F}_0$.

Дело в том, что в рассматриваемой ситуации ***не сила $\vec{F}_0$ является причиной ускорения, а наоборот; не сила $\vec{F}_т$ является причиной изменения ускорения во времени, а наоборот.*** В связи с этим имеет смысл вспомнить, что в рамках классической механики принято ко всем ***внешним*** силам, действующим на тело (массы M), добавлять так называемую ***силу инерции***, считая ее направленной ***противоположно*** ускорению тела. После этого сумма всех сил считается равной нулю:

$$\left(\sum_{i=0}^{i=I} \vec{F}_i\right) + M \cdot (-\vec{\mathbf{a}}) = 0.$$

В этом соотношении $\vec{F}_i$ — одна из внешних сил, а $-M \cdot \vec{\mathbf{a}} = \vec{F}_{ин}$ и есть сила инерции.

[11] *Пановский В. и Филипс М.* Классическая электродинамика. § 20.3. М.: Физматгиз, 1963. *Иваненко Д. и Соколов А.* Классическая теория поля. § 31. М.: ГИТТЛ, 1949.

Но, вот вопрос: как быть, если среди сил, присутствующих под знаком $\sum\limits_{i=0}^{i=I}$, оказывается сила, пропорциональная ускорению? Следует ли выделить ее из-под знака $\sum\limits_{i=0}^{i=I}$, написав

$$\left(\sum_{i=1}^{i=I} \vec{F}_i\right) + M \cdot (-\vec{a}) + M_0 \cdot (-\vec{a}) = 0,$$

где M_0 — пока что не более, чем коэффициент пропорциональности?

Ответ таков: если величина M_0 не является массой тела, значит, ***не является*** силой инерции та сила, абсолютное значение которой равно $M_0 \cdot a$. Но тогда и направление ее относительно вектора $\vec{a}$ должно определяться обстановкой, в которой пребывает тело.

Наконец-то вырисовывается проблема. В рассматриваемой ситуации *возникшая* и *затем неизменная* во времени внешняя сила $\vec{F}_в$, направленная, допустим, в положительную сторону X-оси, вызывает не только ускорение, но еще и порождает силу $\vec{F}_0$. Но куда же направить эту силу, если неизвестно ее происхождение? Я ставлю этот вопрос, опасаясь, что не только я не смог найти на него ответ в широко известных монографиях и учебных пособиях[12]. Тем читателям, кто также не смог сделать это, я предлагаю решить проблему ориентации силы $\vec{F}_0$ следующим образом.

С одной стороны, известно, что сила $\vec{F}_т$ должна быть направлена противоположно силе $\vec{F}_в$, поскольку сила $\vec{F}_т$ — тормозящая. С другой стороны, согласно расчетам всех тех, кто их выполнял, силы $\vec{F}_т$ и $\vec{F}_0$ антипараллельны. Следовательно, направление силы $\vec{F}_0$ обязано совпадать с направлением силы $\vec{F}_в$ (автоматически — с направлением ускорения). Таким образом, переходный процесс, о котором шла речь (см. с. 140), должен описываться уравнением

$$m_0 \cdot \vec{a}(t) = \vec{F}_в + \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 \cdot R_0 \cdot \varsigma^2} \cdot \vec{a}(t) - \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 \cdot \varsigma^3} \cdot \frac{d\vec{a}(t)}{dt}, \qquad (1)$$

где m_0 — масса покоя ускоряемой частицы[13].

[12] Я не привожу здесь собственного объяснения происхождения силы $\vec{F}_0$ по двум причинам. Главная — то, что мне не удалось объясниться менее, чем на трех страницах. *Вторая причина — для тех целей, ради которых* написано Приложение 6, не требуется знать происхождение обеих сил $\left(\vec{F}_0 \text{ и } \vec{F}_т\right)$.

[13] Присутствие в уравнении массы покоя, а не движения обусловлено решением (с самого начала) считать, что скорость частицы остается гораздо меньшей величины ς.

Введя обозначения:

$$m_0 - \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 \cdot R_0 \cdot \varsigma^2} \equiv m_*; \qquad \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 \cdot m_* \cdot \varsigma^3} \equiv \tau; \qquad \frac{F_{\text{в}}}{m_*} \equiv \mathbf{a}_{\text{в}},$$

преобразуем уравнение (1) к виду

$$\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} = \frac{\mathbf{a}_{\text{в}} - \mathbf{a}(t)}{\tau}. \tag{2}$$

(Значки векторов опущены за ненадобностью.)

Решение уравнения (2) с начальным условием $\mathbf{a}(t = 0) = 0$[14] имеет вид:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_{\text{в}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \tag{3}$$

Если $m_* > 0$, то $\tau > 0$, и зависимость (3) совпадает с ожидаемой (рис. 2). Однако именно в связи с неравенством $m_* > 0$ возникает забавная ситуация.

Дело в том, что сила F_0 не равна бесконечности ***только в предположении, что частица не является точечной*** (см. с. 142). Именно из-за этого еще на стыке XIX и XX веков возник соблазн считать массу электрона целиком ***«электромагнитного происхождения»***. Попросту говоря, считать, что $m_0 = \dfrac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 \cdot R_0 \cdot \varsigma^2}$.

Но тогда уравнение (1) предстает в виде

$$\frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 \cdot R_0 \cdot \varsigma^2} \cdot \mathbf{a}(t) = F_{\text{в}} + \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 \cdot R_0 \cdot \varsigma^2} \cdot \mathbf{a}(t) - \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 \cdot \varsigma^3} \cdot \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt}, \tag{4}$$

откуда следует, что

$$\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} = \frac{6\pi\varepsilon_0 \cdot \varsigma^3 \cdot F_{\text{в}}}{q^2}, \tag{5}$$

а, стало быть, $\mathbf{a} \propto t$. Это означает, что ускорение частицы непрерывно возрастает несмотря на то, что внешняя сила (причина ***возникновения*** ускорения) остается неизменной во времени. Конечно, в действительности так быть не может. Ведь получается, что, «выключив» через некоторое время внешнюю силу (направленную в положительную сторону X-оси), мы обнаружим частицу движущейся в том же направлении уже с неизменным во времени ускорением, но ***в отсутствие каких бы то ни сил***. Такое вот беспричинное ускорение.

---

[14] Вполне разумно считать, что внешняя сила возникает скачком в момент $t = 0$ (и потом уже не меняется).

Какой же выход из положения нашли те, кто считал массу электрона «полностью электромагнитной»? Очень оригинальный.

Если заглянуть в книги по электродинамике, в которых рассматривается торможение излучением, нетрудно заметить, что все без исключения авторы фактически обращаются к уравнению

$$m_0 \cdot \mathbf{a}(t) = F_{\text{в}} - \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 \cdot R_0 \cdot \varsigma^2} \cdot \mathbf{a}(t) + \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 \cdot \varsigma^3} \cdot \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt}. \quad (6)$$

Сопоставляя это уравнение с уравнением (1), ясно видно, что в уравнении (6) сила $F_{\text{т}}$ направлена в ту же сторону, что сила $F_{\text{в}}$, а потому и не может считаться силой тормозящей. А вот сила F_0, которая тоже изменила свое направление, превратилась из тянущей в тормозящую. ***Именно изменение направления силы F_0 при сохранении ее пропорциональности ускорению и провоцирует желание считать ее частью силы инерции, объявив массу m_0 неэлектромагнитной добавкой к электромагнитной массе, равной $\dfrac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 \cdot R_0 \cdot \varsigma^2}$.***

В этом случае

$$\left(m_0 + \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 \cdot R_0 \cdot \varsigma^2}\right) \cdot \mathbf{a}(t) = F_{\text{в}} + \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 \cdot \varsigma^3} \cdot \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt}.$$

А уж если считать массу электрона ***полностью*** «электромагнитного происхождения», то величину m_0 можно вообще положить равной нулю. Но в любом случае мы теперь сталкиваемся с уравнением

$$\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} = \frac{\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_{\text{в}}}{\tau}, \quad (7)$$

в котором

$$\tau \equiv \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 \cdot \left(m_0 + \dfrac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 \cdot R_0 \cdot \varsigma^2}\right) \cdot \varsigma^3}; \quad \mathbf{a}_{\text{в}} \equiv \frac{F_{\text{в}}}{\left(m_0 + \dfrac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 \cdot R_0 \cdot \varsigma^2}\right)}.$$

Однако решение уравнения (7) с начальным условием $\mathbf{a}(t = 0) = 0$ имеет вид:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_{\text{в}} \cdot \left(1 - e^{t/\tau}\right) = -\mathbf{a}_{\text{в}} \cdot \left(e^{t/\tau} - 1\right). \quad (8)$$

Получается, что ускорение заряженной частицы под действием неизменной внешней силы (***вызвавшей*** ускорение) и силы, обозначение которой символом $F_{\text{т}}$ создает впечатление о ее тормозящем действии, возрастает мало того, что ***непрерывно***, так еще и в направлении, ***противоположном направлению внешней силы.***

Однако теперь я не могу не обратить внимание читателя на то, что выведенное мною соотношение (3) противоречит выводам, содержащимся во всех учебных пособиях и монографиях по классической электродинамике. Например, в книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица «Теория поля» (М.: Наука, 1967) в § 75 («Торможение излучением») говорится, что использование при описании состояния заряженной частицы силы торможения, определяемой выражением $F_{т}(t) = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 \cdot \varsigma^3} \cdot \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt}$ **«вообще не является удовлетворительным и содержит в себе противоречия»**. Противоречие авторы усматривают в том, что **«уравнение движения заряда в отсутствие внешнего поля, на который** (*на заряд — Ф. В.*) **действует только сила $F_{т}$, имеет вид $m \cdot \mathbf{a} = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 \cdot \varsigma^3} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt}$. Это уравнение имеет кроме тривиального решения $V = \text{const}$** (*то есть, кроме решения* $\mathbf{a}(t) = 0$, *означающего, что уравнения просто не существует — Ф. В.*), **еще решение, в котором ускорение а пропорционально** $\exp\left(\frac{t}{\tau}\right)$ (*здесь* $\tau \equiv \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 \cdot m \cdot \varsigma^3}$ — *Ф. В.*), **то есть неограниченно возрастает со временем... Абсурдность этого результата свидетельствует об ограниченной применимости формулы $F_{т}(t) = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 \cdot \varsigma^3} \cdot \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt}$»**.

Хотя в цитируемой книге вообще не фигурирует сила F_0, так что сравнивать можно направления только двух сил ($F_{в}$ и $F_{т}$), совершенно очевидно, что авторы исходят из того, что ***сила, которую они называют силой торможения*** (заряда), ***направлена не противоположно внешней силе, а в ту же сторону.*** Тогда они неизбежно должны прийти к соотношению (8). Естественно, ничто не мешает «отключить» силу $F_{в}$ через некоторый промежуток времени Δt (к этому моменту $\mathbf{a}(\Delta t) = -\mathbf{a}_{в} \cdot \left(e^{\Delta t/\tau} - 1\right)$), после чего и возникает уравнение

$$\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} = \frac{\mathbf{a}(t)}{\tau} \quad (t \geqslant \Delta t). \tag{9}$$

Ясно, что именно такое уравнение только и могут иметь в виду авторы цитируемой книги. К сожалению, они ни словом не обмолвились о начальном условии, а оно на самом деле таково:

$$\mathbf{a}(t = \Delta t) = -\mathbf{a}_{в} \cdot \left(e^{\Delta t/\tau} - 1\right).$$

Решение уравнения (9) с этим условием имеет вид

$$\mathbf{a}(t > \Delta t) = -\mathbf{a}_{в} \cdot \left(e^{\Delta t/\tau} - 1\right) \cdot e^{t/\tau}.$$

Таким образом, авторы цитируемой книги не замечают, что частица у них ***постоянно движется в одну сторону, а непрерывно возрастающее ускорение частицы постоянно направлено в противоположную сторону***.

В заключение хотелось бы обратить внимание читателя на три обстоятельства.

Первое. Если согласиться с объяснением спина точечной частицы, приведенным в Приложении 5, то выражение для силы F_0, выведенное в, казалось бы, абсурдном предположении, что заряженная частица не является точечной, тем не менее следует признать правильным. Ведь заряд частицы в среднем даже по очень короткому промежутку времени выглядит размазанным по сфере радиуса R_0.

Второе. Не существует никакой угрозы неравенству

$$m_0 - \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 \cdot R_0 \cdot \varsigma^2} \equiv m_* > 0,$$

а ведь лишь при его соблюдении зависимость (3) совпадает с той, что изображена на рис. 2 и представляется правильной. Действительно, если принять данное в Приложении 5 объяснение спина точечной частицы, то

$$R_0 = \frac{\sqrt{3}\hbar}{2m_0 \cdot \varsigma},$$

и тогда

$$\frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 \cdot R_0 \cdot \varsigma^2} = \frac{4}{3\sqrt{3}} \cdot \alpha \cdot m_0 \approx \frac{4}{3 \cdot 137 \cdot \sqrt{3}} \cdot m_0 \ll m_0.$$

Третье. Выражению для силы $F_т$ можно придать вид

$$\vec{F}_т = -\frac{\left(\dfrac{q^2}{6\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R_0 \cdot \varsigma^2}\right) \cdot R_0}{\varsigma} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} = -\frac{M_* \cdot R_0}{\varsigma} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt}, \qquad (10)$$

истолковав величины: M_* как инерциальную массу материального тела (электрического поля), переадресованную его центру инерции; R_0 как протяженность тела; ς как скорость распространения деформации. Рекомендую сопоставить сказанное с определением силы самоторможения, приведенным в подписи к рис. 2.

Приложение 7

О претензиях к классической электродинамике

В Приложении 6 была рассмотрена и отвергнута претензия к электродинамике, не связанная с необходимостью считать элементарный носитель электрического заряда обязательно протяженным или, наоборот, точечным объектом. В настоящем Приложении рассматриваются претензии к электродинамике, обусловленные все еще сохраняющейся надеждой на то, что, в конце концов, выяснится, что электрон (например) является не точечным, а протяженным объектом.

Чтобы читателю не пришлось обращаться к литературе, я сейчас изложу сущность соответствующей гипотезы и традиционные выводы из нее. При этом — по ходу изложения — не будет никаких критических комментариев.

Сущность гипотезы состоит прежде всего в том, чтобы считать электрон сферической оболочкой (не имеющей толщины) радиуса R_0. Далее считается, что если эта оболочка, по которой однородно распределен электрический заряд q, покоится (относительно инерциального наблюдателя), то она, тем не менее, обладает энергией, равной $\frac{q^2}{8\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R_0}$ (> 0). Поскольку эту энергию считают энергией покоя, она будет обозначаться символом E_0. Далее утверждают, что, согласно частной теории относительности, энергии покоя должна отвечать масса покоя, равная

$$m_0 = \frac{E_0}{c^2} = \frac{q^2}{8\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R_0 \cdot c^2} \ (> 0). \qquad (1)$$

В большинстве книг по электродинамике, где обсуждается излагаемая гипотеза, соотношение (1) воспринимается как необходимость *«считать массу электрона целиком электромагнитного происхождения»*.

Разумеется, энергия E_0, равная $\frac{q^2}{8\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R_0}$, не с неба свалилась.

Дело в том, что электрон возникает вместе со своим электрическим полем[1], и электростатическая энергия поля, распределенная в пространстве за пределами сферической оболочки (представляющей

[1] Гравитационным полем пренебрежем.

собой электрон), равна

$$E_{\text{поля},0} = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \int\limits_{\Omega} \mathscr{E}^2 \cdot d\Omega,$$

где $d\Omega$ — бесконечно малый элемент объема; $\frac{\varepsilon_0 \cdot \mathscr{E}^2(r)}{2}$ — объемная плотность энергии в точке пространства[2]. Считая, что напряженность статического поля, возникшего вместе с заряженной частицей, равна $\mathscr{E}(r) = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}$, получаем $E_{\text{поля},0} = \frac{q^2}{8\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R_0}$. ***Именно эта энергия и переадресовывается заряженной частице, становясь ее энергией покоя*** (E_0)[3].

Далее рассматривается ситуация, в которой электрон вместе со своим полем движется вечно равномерно и прямолинейно (относительно инерциального наблюдателя) со скоростью $\vec{V}$, и вычисляется импульс ***поля***, распределенный по пространству, как и энергия поля, с некоторой объемной плотностью. Оказывается, что

$$\vec{P} = \left\{ \frac{q^2}{6\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R_0 \cdot \varsigma^2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{V}{\varsigma}\right)^2}} \right\} \cdot \vec{V}. \qquad (2)$$

Этот импульс, подобно энергии E_0, также переадресовывается частице-оболочке, а величину

$$\left\{ \frac{q^2}{6\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R_0 \cdot \varsigma^2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{V}{\varsigma}\right)^2}} \right\},$$

ссылаясь на теорию относительности, истолковывают как массу движения частицы $m\left(= \frac{\vec{P}}{\vec{V}}\right)$. И, поскольку, согласно той же теории, масса движения равна $m = m_0 \cdot \left(1 - \frac{V^2}{\varsigma^2}\right)^{-1/2}$, из соотношения (2) следует

---

[2] Следует обратить внимание на то, что понятие «плотность» в качестве точного понятия применимо только к континууму — сплошной среде.

[3] Как было условлено в самом начале, по ходу изложения комментариев не будет. Поэтому сейчас не ставится вопрос, с какой стати энергия объекта (поля), расположенного вне сферической оболочки, приписывается этой самой оболочке.

определение массы покоя частицы в виде

$$m_0 = \frac{q^2}{6\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R_0 \cdot \varsigma^2}. \quad (3)$$

Однако ранее, со ссылкой все на ту же теорию относительности (*см. выражение* (1)), было принято, что

$$m_0 = \frac{q^2}{8\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R_0 \cdot \varsigma^2}. \quad (1)$$

Увы, число 8 не равно числу 6.

Как ни странно, претензия в связи с несовместимостью двух определений (1) и (3) была предъявлена только электродинамике, хотя столь же правомерно было бы предъявить ее частной теории относительности.

Есть, однако, еще одна претензия, обусловленная представлением об электроне (элементарном носителе электрического заряда) как о протяженном объекте — сферической оболочке, по которой заряд распределен с некоторой поверхностной плотностью. Естественно, все элементы оболочки должны отталкиваться друг от друга, и она разорвется, если только между элементами оболочки не действуют кроме электрических еще и силы неэлектрической природы, стягивающие оболочку. В этом случае при некотором конечном значении радиуса оболочки возникает равновесие сил.

Уверенность в существовании сил неэлектрической природы подкреплялась очевидным, как казалось сторонникам гипотезы о протяженном электроне, обстоятельством. Именно: несовместимость определений (1) и (3) инерциальной массы истолковывалась ими как свидетельство того, что часть ***истинной*** массы покоя электрона имеет неэлектрическое происхождение. Конечно, эта часть и не могла быть учтенной выражением (1), в котором фигурирует только «электрическая» масса.

Итак, очевидно, что проблема целостности сферической оболочки (иначе говоря, — стабильности протяженного электрона) оказалась тесно связанной с проблемой несовместимости двух определений массы покоя оболочки[4].

[4] Совершенно очевидно, что обе проблемы имеют общее происхождение — они возникают исключительно вследствие отказа в праве на существование точечным частицам.

Замечу, что именно этот отказ объединяет былых приверженцев «электромагнитной природы массы электрона» и современных адептов квантовой геометродинамики. Подобно последним, упомянутые приверженцы тоже внесли множество физико-фантастических предложений, имевших целью объяснить существование протяженного электрона.

Теперь можно переходить к комментариям, причем целесообразно начать с последней проблемы.

Прежде всего напомню, что такой объект, как ***точечная*** (элементарная) частица, обладающая ***инерциальной*** массой покоя (покоя центра инерции частицы, а не ее самой), лишь потому ***автоматически*** обладает ***кинетической*** энергией $(E_{\text{кин},0} = m_0 \cdot \varsigma^2)$, что ***не может существовать иначе, как вращаясь*** по собственной орбите (сфере конечного радиуса $R_0 = \dfrac{\sqrt{3}\hbar}{2m_0 \cdot \varsigma}$)[5]. Но из теории относительности вовсе не следует, что обладающий инерциальной массой покоя (покоя центра инерции объекта) ***протяженный*** объект (представляющий собой либо коллектив точечных частиц, связанных друг с другом взаимодействием, либо материальный континуум — сплошную среду) не может существовать иначе, как вращаясь (например, вокруг оси, проходящей через центр инерции). Подобный объект, находясь в состоянии покоя его центра инерции, всего лишь ***может*** обладать ***кинетической*** энергией вращения; то есть — обладать отнюдь не автоматически, а только если он приведен во вращение воздействием со стороны. Я предлагаю постулировать, что ***материальный континуум*** (*например, такой, как бесконечно протяженное сферически симметричное электрическое поле — сплошная среда*[6]), ***свободный от стороннего воздействия, вращаться не может***[7].

Однако даже не вращаясь и не участвуя вообще ни в каком движении, ***протяженный объект*** (любой природы) ***именно автоматически обладает потенциальной энергией*** — энергией взаимодействия всех его элементов (частиц и т. п.), из которых протяженный объект состоит. Вполне разумно назвать эту энергию ***собственной потенциальной энергией покоя*** (я предлагаю обозначить ее символом Π_0).

А теперь вспомним, что же следует из частной теории относительности. А только то, что соотношение $E_0 = m_0 \cdot \varsigma^2$ связывает собственно-орбитальную ***кинетическую*** энергию точечной частицы с ее инерциальной массой покоя. Если в состоянии покоя центра инерции точечной частицы последняя участвует еще и во взаимодействии с неким телом, то ее полная энергия $(E_{\text{полн}})$ является суммой двух величин:

$$E_{\text{полн}} = E_0 + E_{\text{пот},0} = m_0 \cdot \varsigma^2 + E_{\text{пот},0}.$$

---

[5] Как отмечалось в главе 6, такое условие существования точечных частиц (лептонов, кварков) явилось результатом интерпретации соотношений (14) и (15), и это условие было предложено считать постулатом (в рамках частной теории относительности).

[6] И несферическое электрическое поле и вообще любое поле представляет собой ***сплошную среду***.

[7] ***По этой причине материальный континуум не может обладать спином.***

Если центр инерции частицы движется прямолинейно и равномерно, обладая импульсом $\vec{P}$, то

$$E_{\text{кин,полн}} = \sqrt{(m_0 \cdot \varsigma^2)^2 + (\varsigma \cdot \vec{P})^2},$$

и

$$E_{\text{полн}} = E_{\text{кин,полн}} + E_{\text{пот}} = \sqrt{(m_0 \cdot \varsigma^2)^2 + (\varsigma \cdot \vec{P})^2} + E_{\text{пот}} \tag{4}$$

(в этом случае величина $E_{\text{пот}}$ может оказаться зависящей от $\vec{P}$ и потому отличаться от $E_{\text{пот},0}$).

Соотношение (4) можно представить и в виде

$$E_{\text{полн}} = \frac{P_0^2 + P^2}{m(P)} + E_{\text{пот}}, \tag{5, а}$$

и в виде

$$E_{\text{полн}} = \frac{m_0 \cdot \varsigma^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{\varsigma}\right)^2}} + E_{\text{пот}}, \tag{5, б}$$

но не хотелось бы думать, что кому-нибудь придет в голову написать, например, вот так:

$$E_{\text{полн}} = \sqrt{\left(E_{\text{кин,полн}}\right)^2 + (\Pi_0)^2} = \sqrt{\left(E^2_{\text{кин},0} + \Pi_0^2\right) + (\varsigma \cdot \vec{P})^2},$$

после чего, введя обозначение $\left(E^2_{\text{кин},0} + \Pi_0^2\right) \equiv E_0^2$, всерьез считать ***эту*** величину E_0 энергией покоя.

Предположим теперь, что мы имеем дело именно с протяженным материальным континуумом (сплошной средой), каждый элемент (бесконечно малого объема) которого обладает ***инерциальной*** массой (бесконечно малой)[8]. Пусть этот объект, находясь в состоянии покоя его центра инерции, ***не*** вращается и потому, обладая в целом инерциальной массой M_0, обладает ***только потенциальной*** энергией Π_0.

Подчеркну: ***умножить величину M_0 на ς^2, разумеется, можно, но это будет чисто математической — физически бессодержательной — операцией.*** Рассматриваемый объект не обладает кинетической энергией, которая могла бы оказаться равной $M_0 \cdot \varsigma^2$.

[8] Иными словами, инерциальная масса континуума распределена по его объему с определенной плотностью.

Если центр инерции нашего континуального объекта движется, например, прямолинейно и равномерно со скоростью $\vec{V}$, то вполне закономерно ожидать, что импульс континуума (как целого) будет равен $\vec{P} = \dfrac{M_0}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{\varsigma}\right)^2}} \cdot \vec{V}$, а кинетическая энергия равна $E_{\text{кин}} = \dfrac{P^2}{M_0}$.

Если оказывается, что при этом все элементы континуума движутся с одинаковой скоростью $\vec{V}$, то его потенциальная энергия остается равной собственной потенциальной энергии Π_0, а полная энергия равна

$$E_{\text{полн}} = \Pi_0 + E_{\text{кин}} = \Pi_0 + \frac{P^2}{M_0} =$$

$$= \Pi_0 + \left(\frac{M_0 \cdot \vec{V}}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{\varsigma}\right)^2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{M_0} = \Pi_0 + \frac{M_0 \cdot V^2}{1-\left(\frac{V}{\varsigma}\right)^2}.$$

Поскольку электрическое поле как раз и является материальным бесконечно протяженным континуумом, единственное, что осталось выяснить, так это следующее: является ли многократно упоминавшаяся величина $\dfrac{q^2}{8\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R_0}$ именно потенциальной энергией взаимодействия всех элементов поля. Если да, то эта величина получает полное право считаться ***собственной потенциальной энергией покоя*** поля (и обозначаться символом Π_0). При всем том отношение $\dfrac{\Pi_0}{\varsigma^2}$ не является, по крайней мере, инерциальной массой $\left(\dfrac{\Pi_0}{\varsigma^2} \neq M_0\right)$.

Что же касается инерциальной массы поля (как целого), то в рамках ***частной*** теории относительности величину $\dfrac{M_0}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{\varsigma}\right)^2}}$, присутствующую в выражении для импульса поля, следует считать массой движения поля (как целого). Исходя из аналогии с соответствующим выражением для точечной частицы, можно (*при желании*) назвать величину M_0 массой покоя поля (как целого). Однако учитывая, что $M_0 \cdot \varsigma^2 \neq \Pi_0$ $\left(\Pi_0 = \dfrac{q^2}{8\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R_0}\right)$, ***только одно*** выражение допустимо признать определением массы покоя поля:

$$M_0 = \frac{q^2}{6\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R_0 \cdot \varsigma^2}\ ^{9)}. \tag{6}$$

Как видим, проблема несовместимости двух разных определений одной и той же физической характеристики исчезла. Остается выяснить, может ли величина $\frac{q^2}{8\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R_0}$ претендовать на то, чтобы считаться именно *потенциальной* энергией взаимодействия всех элементов, образующих тот материальный континуум, который мы называем электростатическим полем.

Но вот здесь я должен заметить, что ответ на этот вопрос был известен уже Максвеллу. Тем не менее, лучше всего будет, на мой взгляд, если читатель обратится за ответом к знаменитым «Основам теории электричества» И. Е. Тамма, которые впервые были изданы в 1929 году в нашей стране[10]. В первой главе этой книги прямо сказано, что величина $\left(\frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \mathscr{E}^2\right)$ есть объемная плотность электростатической энергии *взаимодействия*, причем энергии, непрерывно распределенной в пространстве.

Напомню вкратце, каким образом Тамм приходит к этому выводу.

Он начинает с того, что рассматривает потенциальную энергию *взаимодействия* ($E_{вз}$) *двух* точечных зарядов, находящихся в пустом пространстве на расстоянии $r_{1,2}$ друг от друга: $E_{вз} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r_{1,2}}$[11].

Для коллектива таких зарядов

$$E_{вз} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \sum_{j} \frac{q_i \cdot q_j}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r_{i,j}}. \tag{7}$$

Далее Тамм замечает, что если в пространстве находятся не точечные заряды, а сплошная заряженная среда, то выражение (7) нужно

---

[9] Стоит обратить внимание на совпадение величины $M_0 \left(\equiv \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 \cdot R_0}\right)$ из выражения (6) с величиной $M_*\left(\equiv \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 \cdot R_0}\right)$, фигурирующей в выражении (10) Приложения 6. Это совпадение является не случайным, а совершенно естественным.

[10] С тех пор эта книга переиздавалась свыше 10 раз, и достать ее не представляет проблемы.

[11] В книге Тамма множитель $4\pi \cdot \varepsilon_0$ опущен.

заменить другим:

$$E_{вз} = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \rho_{об} \cdot \varphi \cdot d\Omega + \frac{1}{2}\int\limits_{S} \rho_{пов} \cdot \varphi \cdot dS, \tag{8}$$

в котором $\rho_{об}, \rho_{пов}$ — объемная и поверхностная плотности заряда; φ — потенциал поля внутри бесконечно малого элемента объема $d\Omega$ или на бесконечно малом элементе площади dS. (*Далее имеет смысл ограничиться частным случаем, когда $\rho_{пов} = 0$*).

В книге Тамма приводится очень несложное преобразование конструкции $\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \rho_{об} \cdot \varphi \cdot d\Omega$ к виду $\frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \int\limits_{\Omega} \mathscr{E}^2 \cdot d\Omega$. Таким вот образом и возникает соотношение $E_{вз} = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \int\limits_{\Omega} \mathscr{E}^2 \cdot d\Omega$. Тамм особо подчеркивает, что оно является лишь ***математически*** иной формой соотношения $E_{вз} = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \rho_{об} \cdot \varphi \cdot d\Omega$. Итак, конструкция $\frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \int\limits_{\Omega} \mathscr{E}^2 \cdot d\Omega$, использованная для вычисления энергии электростатического поля, возникающего вместе с заряженной точечной частицей, является именно ***потенциальной энергией взаимодействия*** элементов поля. А потому неправильно считать не только, что

$$m_{частицы,0} = \frac{q^2}{8\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R_0 \cdot c^2},$$

но и, что

$$M_{поля,0} = \frac{q^2}{8\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R_0 \cdot c^2}.$$

(*Оба выражения не являются определениями инерциальных масс.*)

В связи с бесспорной интерпретацией величины $\frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \int\limits_{\Omega} \mathscr{E}^2 \cdot d\Omega$ как потенциальной энергии взаимодействия элементов сплошной среды заслуживают внимания, как мне кажется, представления Максвелла о поле. Согласно его представлениям, конструкцию $\frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \int\limits_{\Omega} \mathscr{E}^2 \cdot d\Omega$ следует считать именно ***упругой***, а не электростатической энергией[12].

[12] Электростатическая энергия должна определяться выражением $\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \rho_{об} \cdot \varphi \cdot d\Omega$.

Но тогда получается, что поле находится в состоянии растяжения, и должно разорваться на бесконечно много бесконечно малых частей.

Как видим, целостность (стабильность) *реального* континуального объекта — электрического поля — действительно нуждается в объяснении.

Исходя из соотношения $\frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \int\limits_{\Omega} \mathscr{E}^2 \cdot d\Omega = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \rho_{об} \cdot \varphi \cdot d\Omega$, можно предположить, что электронейтральный континуум (поле) на самом деле представляет собой такую сплошную среду, соседние бесконечно малые объемы которой *заряжены разноименно*[13]. Тогда между ними существуют помимо *упругих* сил *растяжения* еще и силы *электрического притяжения* (сжатия), так что в любой точке поля имеет место равновесие сил.

В заключение хотелось бы сделать замечание, касающееся представлений о веществе.

Предположение, что лептон или кварк состоит из вещества, является, конечно, физически бессодержательным. Это *вещество состоит* из кварков и лептонов. Поле (электрическое, гравитационное) также не состоит из вещества; поле и есть вещество, только совершенно непохожее на то, которое состоит из кварков и лептонов[14].

Подводя итог всему, о чем шла речь в этом Приложении, следует, как мне кажется, сделать вывод о безосновательности претензий к классической электродинамике (равно как и к частной теории относительности). Неадекватным в некоторых ситуациях оказывается «классический» (то есть неквантовый) *способ описания* состояния объекта любой протяженности. История физики знает подобные примеры: ни движение точечного электрона в сферически симметричном электростатическом поле, ни движение электрона в однородном магнитном поле не могут быть описаны достаточно адекватно иначе, как, по крайней мере, в рамках *квантовой* механики.

[13] Отсюда следует, что поле является средой *поляризуемой*. В этой связи см. Приложение 5 (с. 130).

[14] Но, конечно, поле — это физическая, а не математическая субстанция.

В книге содержится подробный критический анализ традиционных постулатов, лежащих в основании частной теории относительности. Предложена новая рациональная система постулатов. Интерпретировано физически содержательным образом знаменитое соотношение Эйнштейна между импульсом $(\vec{P})$, массой покоя m_0 и полной энергией (E) свободной точечной частицы.

Доказывается, что, вопреки традиционной точке зрения, спин точечной частицы и существование античастиц полностью объясняются в рамках классической релятивистской механики и нет никакой необходимости в привлечении специфических квантово-механических представлений.

Доказывается, что соотношение $E=\sqrt{c^2\cdot P^2+m_0^2\cdot c^4}$ хотя и является во всех сегодняшних экспериментальных ситуациях совершенно справедливым, все же представляет собой частный случай более общего соотношения, вид которого приводится и обосновывается.

9 785836 001971 >

С
ра
-23
-46
в Internet: http://urss.ru